III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Liczby zespolone i geometria

1. Czy w twierdzeniu 1 po zamianie wektora AB na *liczbę zespoloną* ab teza pozostaje prawdziwa?

2. Niech S będzie środkiem okręgu opisanego, a H ortocentrum trójkąta ABC. Niech Q będzie punktem takim, że S znajduje się pośrodku HQ i oznaczmy przez T_1, T_2 i T_3 odpowiednio barycentra trójkątów BCQ, CAQ i ABQ. Udowodnij, że

$$|AT_1| = |BT_2| = |CT_3| = \frac{4}{3}R$$

gdzie R - promień okręgu opisanego

3. Kwadraty $BCDE$, $CAFG$, $ABHI$ są zbudowane na zewnątrz trójkąta ABC. Przy założeniu, że $GCDQ$ oraz $EBHP$ są równoległobokami, udowodnij, że APQ jest równoramienny i prostokątny.

4. Niech $A_0A_1...A_6$ będzie siedmiokątem foremnym. Udowodnij, że

$$\frac{1}{|A_0A_1|} = \frac{1}{|A_0A_2|} + \frac{1}{|A_0A_3|}$$

5. (*) Dany jest n-kąt foremny $A_0...A_{n-1}$. Niech P będzie dowolnym punktem na krótszym z łuków A_0A_{n-1} okręgu opisanego na tym wielokącie. Oznaczmy przez h_i odległość P od prostej zawierającej $A_{i-1}A_i$ (h_n odpowiada $A_{n-1}A_0$). Udowodnij, że

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{h_i} = \frac{1}{h_n}$$

6. Dany jest trójkąt ABC. Niech styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie A przecina prostą zawierającą środki AC i AB (midsegment równoległy do BC) w punkcie A_1. Podobnie definiujemy B_1, C_1. Udowodnij, że punkty A_1, B_1, C_1 leżą na prostej równoległej do $\mathcal{LINII\ EULERA}$ trójkąta ABC

7. Okrąg o środku O wpisany jest w czworokąt $ABCD$ i *dotyka* boków AB, BC, CD i DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Oznaczmy punkt przecięcia KL i MN przez S. Pokaż, że $OS \perp BD$

8. (*) Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, a okrąg w niego wpisany *dotyka* AB i AC w D i E. Niech X oraz Y będą punktami przecięcia dwusiecznych kątów $\angle ACB$ i $\angle ABC$ z prostą zawierającą DE. Niech Z będzie punktem pośrodku BC. Udowodnij, że trójkąt XYZ jest równoramienny $\iff \angle A = \frac{\pi}{3}$

Materiały przygotował: Mikołaj Czapp.

9. Niech M, N będą punktami wewnątrz $\triangle$ABC takimi, że $\angle$MAB= $\angle$NAC oraz $\angle$MBA= $\angle$NBC. Udowodnij, że

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CB \cdot CB} = 1$$