Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Przekształcenia liniowe

Ten nieco przewrotny tytuł ma podkreślić najważniejszy wniosek z wykładu, to jest istnienie odpowiedniości pomiędzy przekształceniami liniowymi $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{R}^m$, a macierzami nad $\mathbb{R}$ wymiaru $n \times m$.
Lista podzielona jest na dwie części. Pierwsza z nich ma charakter bardziej rachunkowy. Druga część ma charakter nieco teoretyczny, zawiera między innymi uzupełnienia dowodów z wykładu czy typowe uogólnienia.

1. Obliczyć:
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}^4$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Znaleźć macierze podanych przekształceń w bazie standardowej:
- obrót $\mathbb{R}^2$ o 30 stopni
- rzut wektora z $\mathbb{R}^4$ na pierwsze trzy współrzędne (wynik jest wektorem z $\mathbb{R}^4$ z zerową ostatnią współrzędną)
- odbicie wektora z $\mathbb{R}^2$ względem prostej $3x$
- przekształcenie $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1)$

3. Znaleźć macierz przejść z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{C}$:
- $\mathcal{B} = \{(3,1),(1,2)\}$, $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$
- $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$, $\mathcal{C} = \{(1,1),(0,2)\}$
- $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$
- $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\mathcal{C} = \{e_2, e_3, e_1\}$

4. Zadać macierze następujących ciągów rekurencyjnych:
- $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$
- $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3}$
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + n^2$

5. Zdiagonalizować:
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Materiały przygotował: Kamil Szubiński.

- $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -5 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

6. Ponieważ macierz sąsiedztwa jest symetryczna, wiadomo, że jest diagonalizowalna i ma wartości własne $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$. Pokazać, że λ_1 jest ograniczona przez największy stopień wierzchołka w grafie (stopniem wierzchołka nazywamy liczbę krawędzi które z niego wychodzą).

7. Uzupełnić dowód istnienia macierzy przekształcenia liniowego, tj. wykazać jedyność takiej macierzy.

8. Uzasadnić bez rachunków na macierzach:
- mnożenie macierzy jest łączne
- istnieją nieodwracalne macierze $n \times n$
- macierz $n \times n$ jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej kolumny są liniowo niezależne

9. (*Kwaterniony*) Rozważmy zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ dla $a, b \in \mathbb{R}$. Uzasadnić, że:
- suma dwóch macierzy tej postaci jest również macierzą tej postaci
- podobnie z mnożeniem

W związku z tym, nasz zbiór jest zamknięty na operacje mnożenia i dodawania. Okazuje się, że ma on dokładnie te same właściwości, co liczby zespolone i można go użyć jako sposobu konstrukcji tychże. Mówiąc ściśle, wykaż, że funkcja $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto a + bi$ jest bijekcją zachowującą operacje mnożenia i dodawania.

Analogicznie, możemy określić zbiór macierzy postaci $\begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$ dla $z, w \in \mathbb{C}$. Jego elementy nazywamy *kwaternionami*. Wykazać, że:
- zbiór kwaternionów jest zamknięty na operacje mnożenia i dodawania
- dodawanie kwaternionów jest przemienne i łączne
- mnożenie kwaternionów jest łączne

Czy mnożenie kwaternionów jest przemienne? A co z poprzednim zbiorem macierzy, czy w nim też musieliśmy sprawdzać przemienność?