**III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ**

# Liczby zespolone

Głównym zadaniem listy jest przekonanie, że liczby zespolone nie są tak egzotycznym obiektem jak mogłoby się wydawać. W szczególności po ćwiczeniach rachunkowych umieściłem kilka zagadnień mających dodatkowo uogólnić intuicje z $\mathbb{R}$.

**1.** Sprawdzić, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{C}$:
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a + 0 = a$
- $a + b = b + a$
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $a \cdot 1 = a$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a \cdot b = b \cdot a$

Ponadto zauważ, że dla każdego $a \in \mathbb{C}$ istnieje element przeciwny $b \in \mathbb{C}$, czyli taki, że $a + b = 0$ (wystarczy $b = -a$); zaś gdy $a \neq 0$, istnieje element odwrotny $b \in \mathbb{C}$, tj. $a \cdot b = 1$ (wystarczy $b = \frac{1}{a}$).
Zbiór z działaniami $+, \cdot$ oraz wyróżnionymi elementami 0 i 1 spełniający powyższe własności nazywamy *ciałem*. Liczby rzeczywiste również są ciałem.

**2.** Wykazać własności sprzężenia ($z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $\overline{(z^{-1})} = (\overline{z})^{-1}$, dla $z \neq 0$

**3.** Przedstawić w postaci kanonicznej ($a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$):
- $i^5 + i + 1$
- $(3 + 3i)^3$
- $\frac{i-4}{2i-3} \cdot \frac{2i+3}{2i+4}$
- $2i(i - 1) + \overline{(\sqrt{3} + i)} + (1 + i)\overline{(1 + i)}$

**4.** Obliczyć moduły:
- $10$, $\frac{1}{4}i$
- $3 + 2i$, $\frac{1}{3+2i}$ Czy widać zależność? Uogólnić.
- $e^{i\frac{\sqrt{\pi}}{14!}}$
- $-5 + 6i$, $4 \cdot (-5 + 6i)$ Uogólnić zależność.
- $\frac{5+8i}{3-2i}$, $\frac{1}{8} + \sqrt{10}i$

**5.** Rozwiązać równania ($z \in \mathbb{C}$):
- $2z + 1 + 3i = 0$
- $(3 - i)z + i = 0$
- $(1 + i)z + 2i - 9 = 0$
- $z^2 + 4 = 0$
- $z^3 - 6z^2 + 4z - 24 = 0$

Materiały przygotował: Kamil Szubiński.

- $z^3 + 9z^2 + 33z + 65 = 0$

**6.** Znaleźć wszystkie pierwiastki:
- $(*)$ 4-tego stopnia z 1
- ogólniej, $n$-tego stopnia z 1
- $(*)$ 3-ego stopnia z $-9$
- 4-ego stopnia z $i$
- 3-ego stopnia z $i - 1$

Pierwiastki w podpunktach oznaczonych $(*)$ nanieść na płaszczyznę zespoloną

**7.** Przedstawić jako wyrażenie $sin\varphi$, $cos\varphi$ korzystając z wzoru de Moivre'a:
- $cos(3\varphi)$
- $sin(5\varphi)$

**8.** Używając $e^{i\varphi}$ wykazać:
- $sin(\alpha+\beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$
- $cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$
- $cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
- $sin\alpha \cdot cos\beta = \frac{sin(\alpha-\beta)+sin(\alpha+\beta)}{2}$

**9.** (*Dla zainteresowanych analizą*)
Uzasadnić, że $|\cdot|$ jest normą na $\mathbb{C}$, tj. dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:
- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = 0$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Dzięki powyższym własnościom możemy myśleć o module w $\mathbb{C}$ jak o module (wartości bezwzględnej) w $\mathbb{R}$, co pozwala zdefiniować odpowiedniki pojęć z analizy na prostej rzeczywistej.
Przypomnijmy, że dla ciągu liczb rzeczywistych $x_n$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ gdy

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N > 0)\ (\forall m > N)\quad |x_m - L| < \varepsilon$$

Zauważ, że jeśli przez $|\cdot|$ będziemy oznaczać moduł liczby zespolonej, to powyższą definicję możemy odnieść do ciągu $x_n$ liczb zespolonych o granicy w $L \in \mathbb{C}$. Spróbuj obliczyć następujące granice ciągów dla $n \to \infty$:
- $x_n = \frac{3n-1}{2n+2} + \frac{n+1}{n-1}i$
- $x_n = \frac{1}{n}e^{i\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$

Spróbuj pokazać, że jeśli $x_n = a_n + ib_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$, oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, to $\lim_{n\to\infty} x_n = A + iB$.