Płaszczyzna hiperboliczna

1. Punkt (x, y) utożsamiamy z liczbą zespoloną $z = x + iy$. Uzasadnij, że inwersja względem okręgu o środku 0 i promieniu 1 dana jest wzorem $I(z) = 1/\overline{z}$.
2. Napisz zespolony wzór na inwersję względem okręgu o środku z_0 i promieniu r. Przekształć ten wzór do postaci $z \mapsto \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ (dla stosownych $a, b, c, d \in \mathbf{C}$).

Dla macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ będziemy pisać $A.z = \frac{az+b}{cz+d}$.

3. Udowodnij, że $A.(B.z) = (AB).z$.

Stąd łatwo wnioskujemy, że złożenie parzystej liczby inwersji jest zespoloną homografią (jest postaci $z \mapsto A.z$), a złożenie nieparzystej liczby inwersji jest postaci $z \mapsto A.\overline{z}$.

Różne przekształcenia dają się przedstawić w postaci złożeń inwersji. Na przykład, symetria względem prostej ℓ jest złożeniem trzech inwersji: $S_\ell = I_c \circ I_{I_c(\ell)} \circ I_c$, gdzie c jest okręgiem nieprostopadłym do ℓ.

4. Uzasadnij, że translacje i jednokładności są złożeniami inwersji.

Niech $\mathbf{H} = \{(x, y) : y > 0\} = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ będzie górną półpłaszczyzną.

5. Uzasadnij, że $\mathbf{H}$ jest zachowywana przez inwersje względem okręgów o środkach na osi rzeczywistej. Sprawdź, że taka inwersja ma wzór postaci $z \mapsto A.\overline{z}$ dla pewnej rzeczywistej macierzy A, a złożenia takich inwersji są postaci $z \mapsto A.\overline{z}$ lub postaci $z \mapsto A.z$ – też z rzeczywistą macierzą A.

Będziemy używać określenia *inwersja rzeczywista* na inwersje względem okręgów o środkach na osi rzeczywistej.

6. Zbadaj, które symetrie osiowe, translacje, jednokładności przeprowadzają $\mathbf{H}$ na $\mathbf{H}$. Uzasadnij, że te przekształcenia są wtedy złożeniami inwersji rzeczywistych.

Dowolną parę punktów (z_1, z_2) z $\mathbf{H}$ można zlożeniem inwersji rzeczywistych przekształcić na parę (i, iy) z $y > 1$:

7. Udowodnij, że dowolne dwa punkty nieleżące na pionowej prostej leżą na okręgu o środku na osi rzeczywistej. Wywnioskuj stąd, że można je przekształcić przez inwersję tak, by znalazły się na wspólnej pionowej prostej, i dalej na parę postaci (i, iy) z $y > 1$.

Jeśli zachodzi sytuacja opisana w powyższym zadaniu, to będziemy pisać: $(z_1, z_2) \equiv (i, iy)$. Okazuje się, że wartość y jest jednoznacznie wyznaczona przez parę (z_1, z_2).

8. Niech $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ lub $f(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, gdzie $a, b, c, d, \in \mathbf{R}$. Załóżmy, że $f(i) = i$ oraz $f(iy) = iy'$ dla pewnych $y, y' > 1$. Uzasadnij, że wtedy
   a) $f(z) = z$ lub $f(z) = -\overline{z}$;
   b) $y' = y$.

Z tego wynika, że jeśli $(z_1, z_2) \equiv (i, iy)$ i $(z_1, z_2) \equiv (i, iy')$, to $y = y'$.

Metrykę na $\mathbf{H}$ określamy następująco: jeśli $(z_1, z_2) \equiv (i, iy)$, to $d(z_1, z_2) = \ln y$.

9. Udowodnij, że $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
10. Udowodnij, że metryka d jest zachowywana przez inwersje rzeczywiste i ich złożenia.
11. Uzasadnij, że $d(x + iy, x + iy') = |\ln(y'/y)|$.

Jeśli $(i, x+iy) \equiv (i, iy')$ (gdzie $x \neq 0$, $y > 0$), to $y' > y$; stąd wynika, że $d(i, x+iy) > \ln(y)$ (powtórzmy: o ile $x \neq 0$, $y > 0$).

12. Uzasadnij, że jeśli $x \neq x'$, a $y, y' > 0$, to $d(x+iy, x'+iy') > |\ln(y'/y)|$.

Stąd już nietrudno wywnioskować nierówność trójkąta, jak również fakt, że przedział osi urojonej $[i, iy]$ jest odcinkiem w sensie metryki d, tzn.

$$[i, iy] = \{z \in \mathbf{H} : d(i, iy) = d(i, z) + d(z, iy)\}.$$

Linię, której część zawarta między dowolnymi dwoma jej punktami jest odcinkiem (w sensie metryki d) między tymi punktami, nazywamy *geodezyjną* lub *prostą hiperboliczną*.

13. Uzasadnij, że pionowe półproste są prostymi hiperbolicznymi. Udowodnij, że półokręgi prostopadłe do osi rzeczywistej są prostymi hiperbolicznymi.
14. Udowodnij, że przez dowolne dwa punkty z $\mathbf{H}$ przechodzi dokładnie jedna prosta hiperboliczna.
15. Uzasadnij, że przez punkt nieleżący na prostej hiperbolicznej ℓ przechodzi nieskończenie wiele prostych hiperbolicznych nieprzecinających ℓ.
16. Uzasadnij, że, wbrew pozorom, płaszczyzna hiperboliczna nie kończy się: gdy y maleje do zera, odległość $d(i, iy)$ rośnie do nieskończoności.

Jeszcze garść zadań o inwersjach.

17. Żadne trzy z punktów A, B, C, D nie leżą na prostej. Udowodnij, że kąt między okręgami opisanymi na trójkątach ABC i ABD jest równy kątowi między okręgami opisanymi na trójkątach CDA i CDB.
18. Niech okręgi c_1 i c_2 przechodzą przez punkty A i B i niech będą styczne do okręgu c; niech okrąg c_3 przechodzi przez A i B i niech będzie prostopadły do c. Udowodnij, że c_3 przecina c_1 i c_2 pod tym samym kątem.
19. Dwa okręgi przecinające się w punkcie A są styczne do okręgu c_1 w punktach B i C, zaś do okręgu c_2 w punktach B^* i C^*. Udowodnij, że okręgi opisane na trójkątach ABC i AB^*C^* są do siebie styczne.
20. Dane są cztery okręgi c_1, c_2, c_3, c_4. Niech $c_1 \cap c_2 = \{A, A^*\}$, $c_2 \cap c_3 = \{B, B^*\}$, $c_3 \cap c_4 = \{C, C^*\}$, $c_4 \cap c_1 = \{D, D^*\}$. Wykaż, że jeśli A, B, C, D leżą na okręgu, to A^*, B^*, C^*, D^* też leżą na okręgu.
21. Niech dane będą okręgi c_1 i c_2. Niech s_1 będzie okręgiem stycznym do nich obu, s_2 – stycznym do c_1, c_2 i s_1, s_3 – stycznym do c_1, c_2 i s_2 (i różnym od s_1), s_4 – stycznym do c_1, c_2 i s_3 (i różnym od s_2), itd. Załóżmy, że s_{21} jest styczny do s_1. Udowodnij, że jeśli wybrać pierwszy okrąg inaczej (stycznie do c_1 i c_2, ale w innych miejscach niż s_1) i powtórzyć procedurę, to dwudziesty pierwszy okrąg też okaże się styczny do pierwszego.
22. Udowodnij, że punkty styczności okręgów s_i o których mowa w poprzednim zadaniu wszystkie leżą na jednym okręgu.