Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Liczby zespolone w trygonometrii

Przypomnienie. Każdą liczbę zespoloną $z = a + bi$ możemy zapisać w postaci:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \text{gdzie } r = \sqrt{a^2+b^2},\ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

Ponadto, jeśli $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, to:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Definiujemy sprzężenie liczby zespolonej $z = a + bi$ przez $\overline{z} = a - bi$.
Wówczas jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach rzeczywistych i z jest jego pierwiastkiem, to $W(\overline{z}) = 0$.

1. Niech $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Wyznacz z^{-1} w zależności od θ (bez ułamka).

2. Niech $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Wyznacz w zależności od z:
(a) $\cos\theta$
(b) $\sin\theta$

3. Niech $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Wyznacz w zależności od z i n:
(a) $\cos n\theta$
(b) $\sin n\theta$

4. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi takimi, że:

$$\cos a + \cos b + \cos c = \sin a + \sin b + \sin c = 0$$

Udowodnij, że:

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 0$$

5. Udowodnij równość:

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

Wskazówka: Rozważ $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

6. Przedstaw sumy w postaci zwartej:
(a) $S_n = \sin a + \sin 2a + \cdots + \sin na$,
(b) $C_n = \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos na$.

Wskazówka: Oblicz $C_n + iS_n$ i skorzystaj ze wzorów: $\cos x - 1 = -2\sin^2\frac{x}{2}$, $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Materiały przygotował: Grzegorz Ciesielski.

7. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną większą od 1, to

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\ldots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0$$

oraz:

$$\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{4\pi}{n}+\sin\frac{6\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{2n\pi}{n}=0$$

8. Niech a, b, c będą liczbami rzeczywistymi takimi, że:

$$\cos a+\cos b+\cos c=\sin a+\sin b+\sin c=0$$

Udowodnij, że:

$$\cos(a+b+c)=\frac{1}{3}(\cos 3a+\cos 3b+\cos 3c),$$
$$\sin(a+b+c)=\frac{1}{3}(\sin 3a+\sin 3b+\sin 3c).$$

Wskazówka: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

9. Oblicz wartość iloczynu $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.
Wskazówka: Rozważ $z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$.

10. Udowodnij równość:

$$\frac{1}{\cos 6^\circ}+\frac{1}{\sin 24^\circ}+\frac{1}{\sin 48^\circ}=\frac{1}{\sin 12^\circ}$$

11. Udowodnij równość:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\frac{1}{2}=0$$

12. Udowodnij równość:

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$$

Wskazówka: Rozłóż na czynniki wielomian $W(x)=x^{2n}-1$.

13. Rozwiąż równanie:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$$

14. Udowodnij, że:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

15. Udowodnij, że jeżeli $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, a n jest liczbą nieparzystą, to:

$$\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=4\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}$$