III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Nierówności 1

Postaraj się rozwiązać zadania 1 - 6 elementarnie, to znaczy bez używania twierdzeń.

zadanie 1. Wykaż, że dla dodatnich x, y zachodzi nierówność:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

zadanie 2. Wykaż, że dla dodatniego a zachodzi nierówność:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2$$

zadanie 3. Wykaż, że dla dowolnych rzeczywistych x, y, z zachodzi nierówność:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$$

zadanie 4. Wykaż, że dla dodatnich x, y zachodzi nierówność:

$$\sqrt{xy} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

zadanie 5. Wykaż, że dla dodatnich a, b zachodzi nierówność:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

zadanie 6. Wykaż, że jeśli $a_1 \leqslant a_2$ i $b_1 \leqslant b_2$, to

$$a_1b_1 + a_2b_2 \geqslant a_1b_2 + a_2b_1$$

Twierdzenie o ciągach jednomonotonicznych

Jeżeli ciągi a_1, a_2, ..., a_n i b_1, b_2, ..., b_n są jednomonotoniczne (tzn. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n$ i $b_1 \geqslant b_2 \geqslant ... \geqslant b_n$ lub $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_n$ i $b_1 \leqslant b_2 \leqslant ... \leqslant b_n$), to

$$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n \geqslant a_1b_1' + a_2b_2' + ... + a_nb_n' \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + ... + a_nb_1,$$

gdzie $(b_1', b_2', ..., b_n')$ jest dowolną permutacją ciągu b.

zadanie 7. Zauważ, że każde z zadań 1 - 6 można rozwiązać używając twierdzenia o ciągach jednomonotonicznych. *Nie zawsze jednak warto strzelać z armaty do wróbla, szczególnie tam, gdzie elementarne metody dają proste rozwiązania.* W szczególności, elementarnego rozwiązania zadania 6 użyliśmy przy dowodzeniu twierdzenia.

zadanie 8. Wykaż, że dla dodatnich x, y, z, t zachodzi nierówność:

$$x + y + z + t \leqslant \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{t} + \frac{t^2}{x}$$

Przygotował: Dawid Ignasiak.

zadanie 9. Wykaż, że dla dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^3b}{c}+\frac{a^3c}{b}+\frac{b^3a}{c}+\frac{b^3c}{a}+\frac{c^3a}{b}+\frac{c^3b}{a}\geqslant 6abc$$

zadanie 10. Wykaż, że dla dodatnich a_1, a_2, ..., a_n zachodzi nierówność:

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+...+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n$$

zadanie 11. Wykaż, że dla dodatnich a_1, a_2, ..., a_n $(n\geqslant 3)$ o sumie s zachodzi nierówność:

$$\frac{a_1}{s-a_1}+\frac{a_2}{s-a_2}+...+\frac{a_n}{s-a_n}\geqslant\frac{n}{n-1}$$

Nierówność między średnimi (nierówność Cauchy'ego)

Dla dowolnych dodatnich liczb a_1, a_2, ..., a_n, zachodzą nierówności:

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2,...+a_n^2}{n}}\geqslant\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$$

Ponadto, równość w każdej z nich zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=...=a_n$. Porównywane wyrażenia nazywane są odpowiednio średnią kwadratową, arytmetyczną, geometryczną i harmoniczną liczb a_1, a_2, ..., a_n.

zadanie 12. Udowodnij nierówność między średnimi:

(a) arytmetyczną i geometryczną,
(b) geometryczną i harmoniczną,

zadanie 13. Wykaż, że dla dodatnich a, b zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$$

zadanie 14. Wykaż, że dla dodatnich liczb a_1, a_2, ..., a_n o iloczynie równym 1 zachodzi nierówność:

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)\geqslant 2^n$$

zadanie 15. *(Nierówność Nesbitta)* Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

Jest to szczególny przypadek zadania 11, ale spróbuj je rozwiązać korzystając z nierówności między średnimi.

$*$**zadanie $15\frac{3}{4}$.** Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich równanie:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=4$$

zadanie 16. Wykaż, że dla dowolnego dodatniego x zachodzi nierówność:

$$x^4+\frac{1}{x}>\frac{1}{4}$$

zadanie 17. Znajdź minimum funkcji $f(x)=x^{10}+\frac{7}{x^3}$ zdefiniowanej dla $x>0$.

zadanie 18. Dodatnie x, i y spełniają zależność $2x+5y=15$. Jaka jest największa możliwa wartość wyrażenia x^2y^3?

Nierówność Czebyszewa

Jeżeli a_1, a_2, ..., a_n oraz b_1, b_2, ..., b_n są ciągami jednomonotonicznymi, to zachodzi nierówność:

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geqslant (a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ... + b_n)$$

zadanie 19. Udowodnij nierówność Czebyszewa.

zadanie 20 (lub zadanie 12 podpunkt (c)). Udowodnij nierówność między średnią arytmetyczną i kwadratową.

zadanie 21. Wykaż, że dla dodatnich liczb a_1, a_2, ..., a_n, których suma wynosi 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + ... + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

zadanie 22. Wykaż, że dla dodatnich x, y, z zachodzi nierówność:

$$(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)(x^5+y^5+z^5) \geqslant 9(x^9+y^9+z^9)$$

Nierówność Bernoulliego

Dla dowolnego rzeczywistego $x \geqslant -1$ i naturalnego n zachodzi nierówność:

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Nierówność tę uogólnia się na rzeczywiste wykładniki r. Wtedy jest ona prawdziwa dla $r \leqslant 0$ lub $r \geqslant 1$. Dla $0 \leqslant r \leqslant 1$ prawdziwa jest nierówność w drugą stronę.

zadanie 23. Udowodnij nierówność Bernoulliego dla wykładnika będącego liczbą naturalną.

zadanie 24. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x_1, x_2, ..., x_n spełniona jest nierówność:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + ... + (n-1)x_{n-1} + nx_n \leqslant \frac{n(n-1)}{2} + x_1 + x_2^2 + x_3^3 + ... + x_{n-1}^{n-1} + x_n^n$$

Kącik zadań różnych

zadanie 25. Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b zachodzą nierówności:

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} \geqslant \frac{a^2+b^2}{a+b} \geqslant \frac{a+b}{2}$$

zadanie 26. Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność:

$$a+b+c \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$$

zadanie 27. Wykaż, że dla liczb a, b z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$ zachodzi nierówność:

$$ab(1-a)(1-b) \leqslant \frac{1}{16}$$

zadanie 28. Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b, c zachodzi nierówność:

$$\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a} \leqslant a+b+c$$

zadanie 29. Wykaż, że dla dodatnich liczb x, y, z zachodzi nierówność:

$$x + y + z + \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} + 3 \geqslant 2(\sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3})$$

zadanie 30. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność:

$$\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(b^2+c^2)(c^2+a^2)} + \sqrt{(c^2+a^2)(a^2+b^2)} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{2}$$

zadanie 31. Wykaż, że dla dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

zadanie 32. Wykaż, że dla dodatnich a_1, a_2, ..., a_n zachodzi nierówność:

$$\frac{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3}{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

zadanie 33. Dodatnie liczby rzeczywiste $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ spełniają nierówność

$$a + b + c + d \geqslant 1.$$

Wykaż, że zachodzi nierówność:

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geqslant 1$$

zadanie 34. Wykaż, że dla dodatnich liczb a, b, c, d, e zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} + \frac{64}{e} \geqslant \frac{256}{a+b+c+d+e}$$

zadanie 35. Wykaż, że dla dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}} + \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}} + \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leqslant \frac{3}{2}$$

zadanie 36. Wykaż, że dla dodatniej liczby całkowitej n zachodzą nierówności:

$$\frac{6n}{(n+1)(2n+1)} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$$

zadanie 37. Suma kwadratów dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c wynosi 1. Wykaż, że

$$\frac{1}{3+ab} + \frac{1}{3+bc} + \frac{1}{3+ca} \geqslant \frac{9}{10}$$