Bardo, listopad 2018

**III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ**

# Nierówności II

Jeżeli w treści dana jest liczba n to należy zakładać, iż jest ona liczbą naturalną, chyba że treść zadania mówi inaczej.

**1.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$, zachodzi nieówność $(\frac{n^2}{n^2-1})^n < \frac{n}{n-1}$

**2.** Udowodnić, że dla każdego $n > 1$ zachodzi $n^n > (n+1)^{(n-1)}$

**3.** Udowodnić, żę $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$

**4.** Udowodnij, że funkcja $f(n) = n^{\frac{1}{n}}$jest monotiniczna.

**5.** $\sum_{i=1}^{n} (\frac{i+1}{i})^{\frac{1}{i+1}} < n+1$

**6.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ z przedzialu $(0,\ 1]$ zachodzi nierówność $\prod_{i=1}^{n} (1+a_i)^{\frac{1}{a_{i+1}}} \geq 2^n$, gdzie $a_{n+1} = a_1$

**7.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a < 1$, $b < 1$ zachodzi nierówność $a^b > \frac{a}{a+b}$

**8.** Udowodnić, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $a$, $b$ zachodzi nierówność $a^b + b^a > 1$

**9.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ oraz liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi nierówność $\sum_{i=1}^{n} a_i^{a_{i+1}} > 1$, gdzie $a_{n+1} = a_1$

**10.** Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ oraz liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi nierówność $\sum (S - a_i)^{a_i} > n - 1$, gdzie $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$

**11.** Udowodnić, że dla dowolnego $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ i liczby naturalnej n zachodzi nierówność $(1 + \frac{1}{sin^n(x)}) \cdot (1 + \frac{1}{cos^n(x)}) \geq (1 + \sqrt{2^n})^2$

**12.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ zachodzi nierówność $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geq (1 + (\prod_{i=1}^{n})^{\frac{1}{n}})^n$

**13.** Dany jest ciag n liczb $a_1, a_2, ...a_n$. Niech $A_k$ oznacza średnią arytmetyczną pierwszych k elementów oraz niech $H_k$ oznacza średnią harmoniczną pierwszych k elementów. Uwodownić, że dla każdego k $1 \leq k \leq n-1$ zachodzi nierówność $(k+1)\sqrt{\frac{A_{k+1}}{H_{k+1}}} - k\sqrt{\frac{A_k}{H_k}} \geq 1$

**14.** Dla danych dodatnich liczb $a$oraz $b$ wyznaczyć największą wartość wyrażenia $\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{(a+x_1)\cdot(b+x_n)\cdot\prod_{i=1}^{n-1}(x_i+x_{i+1})}$, gdy zmienne $x_i$ przyjmują wartości dodatnie.

---

Materiały przygotowali: Dawid Ignasiak, Mateusz Rzepecki. Na podstawie książki "Wędrówki po krainie nierówności" Lwa Kurlyandchika.