Bardo, listopad 2018

III UNIWERSYTECKI OBÓZ OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

Nierówności I

Wykaż podane nierówności i załóż, że liczby w zadaniach są dodatnie, chyba że w treści jest napisane inaczej. W niektórych zadaniach przyjmujemy, że $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, a tam gdzie są sigmy i ciągi przyjmujemy, że $a_{n+1} = a_1$.

1. $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geqslant 5\sqrt[5]{ab}$

2. $\frac{a^3+b^6}{2} \geqslant 3ab^2 - 4$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą

3. $8(a+b+c)^3 \geqslant 27(a+b)(b+c)(c+a)$

4. $\prod_{i=1}^{n}(1 - \frac{2a_i}{S}) \leqslant (\frac{n-2}{n})^n$

5. $\sum_{i=1}^{n} a^{2i} \geqslant (n+1)a^n - 1$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą

6. Dla ustalonych liczb naturalnych n, k znajdź liczbę x z przedziału $\langle 0, 1\rangle$, dla której wartość wyrażenia $x^n(1-x)^k$ jest największa.

7. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqslant n(n-1) + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_{i+1}}$, jeżeli $S = 1$

8. $\prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{a_i} - 1) \geqslant (n-1)^n$, jeżeli $S = 1$

9. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, ..., a_n$ oraz dla liczby naturalnej $k \in 2, 3, ..., n$ zachodzi nierówność $kb_k - (k-1)b_{k-1} \leqslant a_k$, gdzie b_k jest średnią geometryczną liczb $a_1, a_2, ..., a_k$.

10. $2(\frac{log_b a}{a+b} + \frac{log_c b}{b+c} + \frac{log_a c}{c+a}) \geqslant \frac{9}{a+b+c}$, gdzie $a, b, c > 1$

11. $\sum_{k=1}^{n} a_k^{p+1} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k a_{k+1}^p$

12. $\prod_{i=1}^{n}(1 + a_i) \leqslant \sum_{i=0}^{n} \frac{S^i}{i!}$

13. $n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} < 1 + n(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}})$, $n \geqslant 2$

14. $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{a_{i+1}})^n \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1}}{a_i}$

15. $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+S-a_i} + \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i) \leqslant 1$, dla liczb $a_1, a_2, ..., a_n$ z przedziału $[0, 1]$

16. (*Nierówność Karlemana*) $\sum_{i=1}^{n} \sqrt[i]{a_1 a_2 ... a_i} < e \sum_{i=1}^{n} a_i$

Materiały przygotowali: Dawid Ignasiak, Mateusz Rzepecki. Na podstawie książki "Wędrówki po krainie nierówności" Lwa Kurlyandchika.