III Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej
Bardo Śląskie, 11.2018

Teoria grafów

Graf $G = (V, E)$, V - zbiór wierzchołków, E zbiór krawędzi. Będziemy zakładać, że graf jest **prosty**, tzn. nie ma wielokrotnych krawędzi oraz krawędzi łączących ten sam wierzchołek. $d(v)$ - **stopień wierzchołka** v, tzn. liczba jego sąsiadów (wierzchołków z którymi v połączone jest krawędzią). Wszystkie grafy poniżej będą miały skończoną liczbę wierzchołków i krawędzi. **ścieżka, cykl,**

1. Niech $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pokaż, że $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E|$.

2. Niech G będzie grafem, w którym każdy wierzchołek ma stopień 2. Pokaż, że G jest sumą rozłącznych cykli.

3. Rozważmy graf G i dwa z jego wierzchołków v_1, v_2. Pokaż, że jeżeli istnieją dwie ścieżki z v_1 do v_2, jedna parzystej długości, a druga nieparzystej, to graf zawiera cykl nieparzystej długości.

4. W grafie każdy wierzchołek na stopień co najmniej k. Pokaż, że istnieje cykl o długości przynajmniej $k + 1$. Pokaż, że to nie jest prawdą, gdy graf jest nieskończony.

Klika jest to (pod)graf, w którym wszystkie pary wierzchołków są połączone krawędziami. Graf jest **spójny** jeżeli dwa dowolne wierzchołki można połączyć ścieżką. **Drzewo** jest to spójny graf bez cykli. **Spójna składowa** ...

5. Załóżmy, że graf G zawiera cykl i jest spójny. Pokaż, że można usunąć jedną krawędź tak, aby graf pozostał spójny.

6. W spójnym grafie istnieje drzewo zawierające wszystkie jego wierzchołki (takie drzewo nazywamy **drzewem rozpinającym**).

7. Drzewo o n wierzchołkach ma $n - 1$ krawędzi.

8. Udowodnij, że każdy spójny graf o n wierzchołkach ma przynajmniej $n - 1$ krawędzi. Pokaż również, że jeżeli graf dokładnie $n - 1$ krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy jest drzewem.

9. Pokaż, że jeżeli graf G zawiera n wierzchołków, $n - 1$ krawędzi oraz nie ma cykli, to jest spójny.

10. Pokaż, że każde drzewo (z co najmniej dwoma wierzchołkami) ma przynajmniej 2 wierzchołki stopnia 1.

11. Niech G będzie grafem bez cykli z n wierzchołkami i k spójnymi składowymi . Pokaż, że G ma dokładnie $n - k$ krawędzi.

12. Niech G będzie spójnym grafem, w którym każdy wierzchołek jest stopnia co najmniej 2. Pokaż, że istnieją dwa sąsiednie wierzchołki takie, że po ich usunięciu graf pozostanie spójny.

13. Niech G będzie spójnym grafem zawierającym co najmniej 3 wierzchołki. Pokaż, że istnieją dwa wierzchołki takie, że jeżeli usuniemy jeden z nich lub oba, to graf pozostanie spójny.

14. (Bałkańska Olimpiada Matematyczna 2002) Załóżmy, że G jest grafem którego wszystkie wierzchołki mają stopień co najmniej 3. Pokaż, ze G zawiera cykl o parzystej długości.

15. Niech G będzie grafem o n wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień większy lub równy niż $n/2$. Pokaż, że G jest spójny.

16. (USA 1989) 20 graczy tenisowych rozgrywa 14 gier tak, że każdy z nich gra przynajmniej raz. Pokaż, że istnieje 6 gier w których gra 12 różnych graczy.

17. (IMO 2006) Niech P będzie 2006-kątem foremnym. Przekątną wielokąta P nazwiemy dobrą, jeśli jej końce dzielą brzeg tego wielokąta na dwie części, z których każda składa się z nieparzystej liczby boków wielokąta P. Każdy bok wielokąta P również nazwiemy dobrym. Załóżmy, że wielokąt P podzielono na trójkąty przy pomocy 2003 przekątnych, z których żadne dwie nie przecinają się wewnątrz wielokąta P. Wyznaczyć największą liczbę trójkątów równoramiennych, które mogą pojawić się w takiej konfiguracji i które mają dwa dobre boki.[1]

---

[1] **Wskazówka.** Rozważ graf, który posiada 2004 wierzchołki odpowiadające powstałym trójkątom. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią jeżeli odpowiadające im trójkąty mają wspólny bok, który nie jest dobry. Wówczas każdy wierzchołek ma stopień 1 lub 3.

W grafie $G = (V, E)$ podzbiór $V' \subset V$ nazywamy **niezależnym** jeżeli żadne dwa jego wierzchołki nie są połączone krawędzią. Graf nazywamy **dwudzielnym** jeżeli zbiór jego wierzchołków możemy podzielić na dwa niezależne zbiory X i Y. (rysunek)

18. Pokaż, że w grafie dwudzielnym z n wierzchołkami może być co najwyżej $n^2/4$ krawędzi.

19. (Twierdzenie Königa, 1936). Graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego cykle mają parzystą długość.

G' jest **skojarzeniem** w grafie G jeżeli jest jego podgrafem i każdy wierzchołek w G' jest stopnia 1. G' jest **perfekcyjnym skojarzeniem** w grafie G jeżeli dodatkowo G' zawiera wszystkie wierzchołki G. (rysunek)

20. Niech G będzie grafem z $2n$ wierzchołkami i takim, że wszystkie wierzchołki mają stopień co najmniej n. Pokaż, że G ma perfekcyjne skojarzenie.

21. (**Twierdzenie Halla 1935; Twierdzenie o małżeństwach**) Niech G będzie grafem dwudzielnym z komponentami X i Y tż. $|X| = |Y|$. Graf G ma perfekcyjne skojarzenie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego podzbioru $S \subset X$ mamy $|S| \leq |\Gamma(S)|$ ($|\Gamma(S)|$ oznacza zbiór sąsiadów zbioru S).

22. Udowodnij, że jeśli każda dziewczyna zna r chłopców i każdy chłopiec zna r dziewczyn, to istnieje perfekcyjne skojarzenie. (Udowodnij, ze w grafie dwudzielnym takim, że każdy wierzchołek ma stopień r, to istnieje perfekcyjne skojarzenie.

23. (Kazachstan 2003) Mamy 2 kwadratowe kartki papieru o polu 2003. Dzielimy każdą z nich na 2003 wielokąty (być może na różne sposoby) o polu 1. Jedną z kartek umieszczamy na drugiej. Pokaż, że możemy umieścić 2003 pinezki, aby każdy z 4006 wielokątów został przekłuty.

24. Prostokątem łacińskim wymiaru m x n ($m \leq n$) nazywamy tablicę mn liczb całkowitych $1, ..., n$ o tej własności, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdują się liczby parami różne. Kwadratem łacińskim n x n nazywamy prostokąt łaciński wymiaru n x n. Pokaż, że każdy prostokąt łaciński można uzupełnić do kwadratu łacińskiego.

25. Talię 52 kart dzielimy na 13 równych zbiorów. Udowodnij, że zawsze można wybrać po jednej karcie z każdego zbioru, aby wsród wybranych 13 kart były wszystkie figury (jest ich 13: As, Król, ...).

26. Na szachownicy umieszczono wieże w taki sposób, że w każdym wierszu i w każdej kolumnie są dokładnie 3 wieże. Pokaż, że można wybrać spośród nich 8 wieży tak, aby żadne dwie z nich nie atakowały się nawzajem.

27. (Kanada 2006) Dana jest prostokątna tablica nieujemnych liczb z m wierszami i n kolumnami taka, że każda kolumna i każdy wiersz zawierają co najmniej jeden dodatni element. Co więcej, jeżeli wiersz i kolumna przecinają się w dodatnim elemencie, to sumy ich elementów są równe. Pokaż, że $m = n$.

28. Tablicę nxn wypełniono zerami i jedynkami w taki sposób, że jeżeli wybierzemy losowo n komórek (żadne dwie z nich nie są w tym samym rzędzie lub tej samej kolumnie) wtedy przynajmniej jedna z nich zawiera 1. Pokaż, że możemy znaleźć i wierszy i j kolumn tak, aby $i + j \geq n + 1$ i ich przecięcie zawiera tylko jedynki.

29. Zbiór P składa się z 2005 rozłącznych liczb pierwszych. Niech A będzie zbiorem wszystkich możliwych iloczynów 1002 elementów P i B będzie zbiorem wszystkich możliwych iloczynów 1003 elementów P. Pokaż, że istnieje funkcja f, różnowartościowa i 'na', ze zbioru A w B taka, że dla każdego $a \in A$ liczba $f(a)$ jest podzielna przez a.

30. W tablicy $n \times n$ znajdują się nieujemne liczby takie, że suma w każdym wierszu i każdej kolumnie wynosi 1. Pokaż, że można wybrać n liczb z rozłącznych rzędów i kolumn, które są dodatnie.

31. Na przyjęciu jest b chłopców i g dziewczyn dla b i g spełniających $g \geq 2b - 1$. Każdy chłopak zaprasza dziewczynę do tańca. Uzasadnij, że może to być zrobione w taki sposób, że albo każdy chłopak tańczy z dziewczyną, którą zna, albo wszystkie dziewczyny, które znają nie tańczą.

(db)

Zbadaj strukturę powstałego grafu.