III Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej
Bardo Śląskie, 11.2018

Kombinatoryka

1. Wyznacz największą spośród liczb otrzymanych przez usunięcie 100 cyfr z liczby

$$12345678910112113\ldots 9899100$$

2. Ile dzielników ma liczba 10^{99}? Jaka ich część jest wielokrotnością liczby 10^{88}?

3. Ile istnieje par uporządkowanych (a, b) liczb naturalnych, których najmniejszą wspólną wielokrotnością jest $2^3 5^7 11^{13}$

4. Ile istnieje liczb naturalnych mniejszych od 1000, które zawierają co najmniej jedną 1?

5. Dany jest zbiór S zawierający n elementów. Pokaż, że zawiera on 2^n różnych podzbiorów.

6. Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z liczb $\{3, 5, 6\}$?

7. Liczba permutacji zbioru n elementowego wynosi $n!$.

8. Ile liczb trzycyfrowych można utworzyć z liczb $\{3, 5, 6, 8\}$?

9. Ze zbioru n elementowego można wybrać k elementów na

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \cdot (1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n - k)}$$

10. W klasie jest 9 dziewcząt i 5 chłopców. Wychowawca chce zrobić zdjęcie. W tym celu ustawia wszystkich w rzędzie tak, aby zarówno dziewczyny jak i chłopcy stali wg wzrostu. Na ile sposobów można ich ustawić?

11. Wybieramy losowo 3 wierzchołki sześcianu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że utworzą one trójkąt równoboczny?

12. W letnim obozie koszykówki bierze udział 210 osób. Każda z nich przyporządkowana jest jednemu trenerowi. Zauważono, że każdy trener ma inną liczbę podopiecznych. Na ile sposobów można utworzyć taką grupę?

13. W turnieju tenisowym uczestniczy $2n$ graczy. Na ile sposobów mogą rozegrać pomiędzy sobą spotkania w pierwszej rundzie?

14. Przy okrągłym stole siada n osób. Na ile sposobów mogą to zrobić? Dwa usadzenia uważamy za równoważne jeżeli wszystkie osoby mają tych samych sąsiadów.

15. Dwóm osobom dajemy $2n$ kulek w trzech kolorach (każda z nich otrzymuje 3n kul). Na ile sposobów możemy to zrobić?

16. Ile istnieje podzbiorów $\{1, 2, \cdots, n\}$, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb?

17. Czy można przyporządkować krawędziom sześcianu liczby $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ tak, aby dla każdego wierzchołka suma liczb jego krawędzi była taka sama?

18. Ile podzbiorów o nieparzystej liczności zawiera zbiór n-elementowy?

19. Ile przekątnych jest n-kącie wypukłym?

20. Czy można na okręgu rozmieścić liczby $1, 2, \ldots, 9$ tak, aby suma żadnych dwóch sąsiednich nie była podzielna przez 3, 5 lub 7?

21. Na ile sposobów można wybrać dwa rozłączne podzbiory zbioru n-elementowego?

22. Pokaż
$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

23. Pokaż
$$a)\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad b)\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad c)\ k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
$$d)\ \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \cdots \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$
$$e)\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

24. Na ile sposobów z grupy n osób można wybrać komitet złożony z k osób, z których jedna zostanie przewodniczącym?

25. Na ile sposobów z przewodniczącym można utworzyć z grupy n osób? Uzasadnij
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

26. (IMO) Znajdź najdłuższy ciąg o takiej własności, że suma każdych 7 kolejnych jego elementów jest ujemna, a suma każdych 11 kolejnych jest dodatnia.

27. Ile trójkątów można ułożyć z patyczków długości $1, 2, \ldots, n$?

28. (Zadanie Banacha) Pewien matematyk nosi w kieszeniach (lewej i prawej) po jednym pudełku zapałek, w każdym jest n zapałek. Ilekroć chce zapalić papierosa, sięga do losowo wybranej kieszeni. Jaka jest szansa, że gdy po raz pierwszy wyciągnie puste pudełko, w drugim będzie dokładnie k zapałek? ($k = 0, 1, \ldots, m$, gdzie m jest liczbą zapałek w pełnym pudełku; zakładamy, że na początku oba pudełka są pełne).

Zasada szufladkowa 1. Jeżeli umieścimy $n+1$ kul w n pudełkach, to w jednym z nich muszą się znaleźć co najmniej dwie kule.

Zasada szufladkowa 2. Jeżeli umieścimy n kul w k pudełkach, to w jednym z nich musi się znaleźć co najmniej $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ kul.

29. Uzasadnij, że dla każdego trójkąta nie istnieje prosta nie przechodząca przez żaden z jego wierzchołków i przecinająca wszystkie jego boki.

30. W pokoju jest n osób. Pokaż, że wśród nich są dwie osoby, które mają tę samą liczbę znajomych.

31. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą n liczbami całkowitymi (niekoniecznie różnymi). Pokaż, że istnieje podzbiór tych liczb o sumie podzielnej przez n.

32. Danych jest 20 różnych liczb dodatnich całkowitych mniejszych niż 70. Pokaż, że wśród ich różnic są 4 równe liczby.

33. Danych jest 9 punktów o współrzędnch całkowitych na płaszczyźnie. Pokaż, że istnieje punkt kratowy wewnątrz jednego z odcinków łączących zadane punkty.

34. Udowodnij, że dla spośród 13 dowolnych punktów na płaszczyźnie o współrzędnych całkowitych, można zawsze znaleźć 4, których środek ciężkości ma współrzędne całkowite.[1]. A dla 12 punktów?

[1] Środkiem cięzkości punktów $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ jest punkt $((x_1 + \cdots + x_n)/n, (y_1 + \cdots + y_n)/n)$

35. Udowodnij, że dla spośród 13 dowolnych punktów na płaszczyźnie o współrzędnych całkowitych, można zawsze znaleźć 3, których środek ciężkości ma współrzędne całkowite.

36. Tworzymy nieskończony ciąg $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, \ldots$ w taki sposób, że n-ty wyraz jest sumą dwóch poprzednich modulo 10. Udowodnij, że ten ciąg jest periodyczny.

37. Rozważmy ciąg Fibonacciego zdefiniowany następująco

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+1} = a_{n-1} + a_n, \text{ dla } n > 1.$$

Pokaż, że dla każdego n istnieje liczba Fibonacciego kończąca się n zerami.

38. Niech n będzie liczbą niepodzielną przez 2 i 5. Udowodnij, że istnieje wielokrotność n składająca się z samych jedynek.

39. Wewnątrz pokoju o powierzchni 5. Umieszczamy 9 dywanów o polu 1 i dowolnym kształcie. Udowodnij, że pewne dwa dywany pokryją się na powierzchni przynajmniej $1/9$.

40. Pokaż, że jeżeli połączymy 6 punktów na płaszczyźnie niebieskimi lub zielonymi odcinkami, to wśród utworzonych trójkątów (o wierzchołkach wśrod zadanych punktów) znajdą się przynajmniej 2 tego samego koloru.

41. (Meksyk 1998) Boki i przekątne regularnego ośmiokąta są w kolorze białym lub czarnym. Pokaż, że istnieje co najmniej 7 jednokolorowych trójkatów utworzonych przez wierzchołki ośmiokąta.

(db)