Bardo Śląskie, 12-16.11.2018

III Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Wielomiany

Wprowadzenie

Wielomian to funkcja postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Pojęcia: *współczynniki wielomianu, pierwiastek wielomianu, stopień wielomianu, pierwiastki wymierne wielomianu, dzielenie wielomianu, twierdzenie Bezout, wzory Viete'a*

Zadanie 1 Wykaż, że jeżeli m jest liczbą całkowitą, to suma współczynników wielomianu $W(x) = \left(\frac{4m^3}{m-\frac{1}{2}}x^4 - 2mx^3 - 2x^2 - \frac{1}{2m-1}\right)^2$ jest również liczbą całkowitą.
Zadanie 2 Znajdź sumę współczynników przy parzystych potęgach x wielomianu $W(x) = (x^5 + 7x^2 - x + 5)^{2018}$.
Zadanie 3 Wiedząc, że dla dowolnego x zachodzi $2W(x) + W(1-x) = 3x^2$ wyznacz $W(5)$.
Zadanie 4 Dane są wielomiany: $p(x) = x^5 - x^3 + 1$, $q(x) = x^2 - 3$. Obliczyć $q(r_1)q(r_2)q(r_3)q(r_4)q(r_5)$, gdzie r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 są pierwiastkami wielomianu $p(x)$.
Zadanie 5 (LVIII OM - II - 1) Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.
Zadanie 6 Jeżeli $P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych, to dla dowolnych, różnych liczb całkowitych a i b zachodzi warunek: $(a-b)|(P(a) - P(b))$.
Zadanie 7 (XLVI OM - II - 1) Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, a liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.
Zadanie 8 Wielomian W ma postać $W(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$ gdzie a_1, a_2, a_3, a_4 są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Wiedząc dodatkowo, że $W(2) = 2, W(4) = 4, W(6) = 6, W(8) = 8$, oblicz $W(10)$ (bez obliczania współczynników a_i).
Zadanie 8 Pokazać, że jeśli wielomian W o współczynnikach całkowitych dla sześciu różnych liczb całkowitych przyjmuje wartość 12, to nie ma pierwiastków całkowitych.
Zadanie 9 Wielomian W o współczynnikach całkowitych dla trzech różnych liczb całkowitych przyjmuje wartość 2, Wykaż, że dla żadnego argumentu całkowitego nie przyjmuje wartości 1.
Zadanie 10 Wartości wielomianu $W(n) = n^2 - n + 41$ są dla każdego $n = 1, 2, 3 \ldots, 40$, liczbami pierwszymi. Znajdź 40 kolejnych naturalnych n, dla których $W(n)$ będą liczbami złożonymi.
Zadanie 11 (II OM - II - 4) Dowieść, że jeżeli równania $x^2 + mx + n = 0$ i $x^2 + px + q = 0$ mają wspólny pierwiastek, to między współczynnikami tych równań zachodzi związek $(n-q)^2 - (m-p)(np-mq) = 0$.

Zadanie 12 Znajdź wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające dla wszystkich x rzeczywistych równość $xW(x-1)-(x-2)W(x)$
Zadanie 13 Wyznaczyć a,b tak aby wielomian $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ był kwadratem innego wielomianu.
Zadanie 14 Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x zachodzi równość $P(x^2-1)=P(x)^2-1$. Wykaż, że dla każdego x zachodzi $P(x)=x$.
Zadanie 15 (XXIV OM - I - 8) Znaleźć wielomian o współczynnikach całkowitych najniższego możliwego stopnia, którego pierwiastkiem jest $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
Zadanie 16 (XXI OM - II - 5) Dany jest wielomian $P(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}x^2$. Niech $Q(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ będzie wielomianem określonym wzorem
$Q(x)=P(x)\cdot P(x^3)\cdot P(x^9)\cdot P(x^{27})\cdot P(x^{81})$. Obliczyć $\sum_{k=0}^{m}|b_k|$
Zadanie 17 (XXXIII OM - II - 1) Dowieść, że jeżeli c,d są liczbami całkowitymi, przy czym $c\neq d$, $d>0$ to równanie $x^3-3cx^2-dx+c=0$ ma nie więcej niż jeden pierwiastek wymierny.
Zadanie 18 (XLVII OM - I - 9) Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2-12x+11$ resztę $990x-889$. Wykazaż, że wielomian te nie ma pierwiastków całkowitych.
Zadanie 19 (XXXI - II - 4) Udowodnić, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi oraz wielomian $ax^3-ax^2+9bx-b$ ma trzy pierwiastki dodatnie, to są one równe.
Zadanie 20 (XXX OM - I - 5) Znaleźć taką liczbą rzeczywistą m, dla której iloczyn pewnych dwóch pierwiastków rzeczywistych równania $2x^4-7x^3+mx^2+22x-8=0$ wynosi 2.
Zadanie 21 (XXXVII OM - I - 3) Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej k wielomian $(x^4-1)(x^3-x^2+x-1)^k+(x+1)x^{4k-1}$ dzieli się przez x^5+1.
Zadanie 22 (XXXVIII OM - II - 4) Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych a,b, dla których wielomiany $x^4+2ax^2+4bx+a^2$ i x^3+ax-b mają dwa różne wspólne pierwiastki rzeczywiste.
Zadanie 23 (LVI OM - II - 4) Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek: Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p. Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której $W(m)=W(m+1)=0$.