# III Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

## Indukcja matematyczna

### Wprowadzenie

Niech $W$ będzie własnością liczb naturalnych spełniającą następujące dwa warunki:

- *W(0)* jest prawdą
- dla wszystkich liczb naturalnych $n$, jeśli *W(n)* jest prawdą to także *W(n+1)* jest prawdą

Wtedy wszystkie liczby naturalne mają własność $W$.

**Pojęcia:** *podstawa indukcyjna, krok indukcyjny, założenie indukcyjne, teza indukcyjna*

**Zadanie 1 (nierówność Bernoulliego)**
Wykaż indukcyjnie, że dla wszystkich rzeczywistych $x > -1$ oraz dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $(1+x)^n \geq 1 + nx$

**Zadanie 2** Udowodnij indukcyjnie, że dla każdego naturalnego n > 1

a) $1+2+3+4+5+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1+3+5+7+9+\cdots+(2n-1) = n^2$

c) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

d) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

e) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

f) $1\cdot 3\cdot (1!)^2 + 2\cdot 4\cdot (2!)^2 + \cdots + n\cdots(n+2)\cdot(n!)^2 = [(n+1)!]^2 - 1$

**Zadanie 3** Rozwiąż zależności rekurencyjne i udowodnij korzystając z indukcji

a) $f_n = f_{n-1} + (-1)^{n+1}n$
dla $n > 1$ i $f_1 = 1$

b) $g_n = g_{n-1}g_{n-2}$
dla $n > 2$ i $g_1 = g_2 = 2$

c) $h_n = h_{n-1}^2/h_{n-2}$
$h_0 = 1, h_1 = 2$

d) $na_n = (n-2)!a_{n-1}a_{n-2}$
$a_0 = 1, a_1 = a_2 = 2$

d) $101|10^{2n} - (-1)^n$

e) $10|2^{2^n} - 6$

f) $169|3^{3n} - 26n - 1$

g) $12|10^n - 4$

h) $30|n^5 - n$

Niech $F_n$ oznacza $n$-tą liczbę Fibonacciego

**Zadanie 4** Pokaż, że

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$$

**Zadanie 5** Udowodnij indukcyjnie zależności

a) $F_{n+1} < 2F_n$ dla $n > 3$

b) $F_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} F_i$

c) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$

d) $F_0^2 + F_1^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$

e) $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$

**Zadanie 6** Pewne twierdzenie o liczbach naturalnych $T(n)$ spełnia: z $T(n)$ wynika $T(n+2)$ oraz z $T(n)$ wynika $T(n-3)$. Ponadto $T(1)$ jest prawdziwe. Pokazać prawdziwość $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej $n$.

**Zadanie 7** Firma kateringowa pakuje kanapki wyłącznie w pudełka po 3 lub 5 sztuk. Udowodnij, że każdą liczącą więcej niż 8 sztuk liczbę kanapek da się zapakować w takie pudełka tak, aby wszystkie pudełka były pełne.

**Zadanie 8** Udowodnij, że każdą kwotę $n$ można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.

**Zadanie 9** Liczby $a_n$, $b_n$ są określone wzorami

$$a_1 = b_1 = 1, a_{n+1} = a_n + b_n, b_{n+1} = 2a_n + b_n$$

dla $n = 1, 2, 3 \ldots$

Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi równość $2a_n^2 - b_n^2 = (-1)^{n+1}$

**Zadanie 10** Dla jakich $n$ nierówność $n^4 \leq 2^n$ jest prawdziwa?

**Zadanie 11** Udowodnij nierówność

$$\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}$$

**Zadanie 12 (IV OM - I - 7)** Dowieść, że gdy $n$ jest liczbą całkowitą wieksza od 2, to

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$$

**Zadanie 13 (VIII OM - I - 12)** Udowodnić, że $n$ prostych leżących na płaszczyźnie, z których każde dwie przecinają się, ale żadne trzy nie przechodzą przez jeden punkt, dzieli płaszczyznę na $\frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ części

**Zadanie 14 (XXVIII - I - 8)** Dowieść, że zbiór $\{1, 2, \ldots, 2^{s+1}\}$ można tak rozbić na dwa zbiory $2s$-elementowe $\{x_1, x_2, \ldots, x_{2^s}\}$, $\{y_1, y_2, \ldots, y_{2^s}\}$, że dla każdego naturalnego $j \leq s$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{2^s} x_i^j = \sum_{i=1}^{2^s} y_i^j$$