Bardo, listopad 2017 r.

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA PTOLEMEUSZA

0. Udowodnij twierdzenie Ptolemeusza: Iloczyn długości przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków tego czworokąta.

1. Niech X będzie dowolnym punktem na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym ABC. Wykaż, że największy z odcinków XA, XB, XC jest równy sumie dwóch pozostałych.

2. Trójkąt ABC wpisano w okrąg. Oznaczmy przez m, n, k odległości pewnego punktu X leżącego na okręgu od boków BC, AC, AB odpowiednio. Wykaż, że $a/m = b/n + c/k$, gdzie a, b, c to długości boków ABC.

3. Długości boków trójkąta ABC tworzą postęp arytmetyczny ($b > a > c$). Niech I – środek okręgu wpisanego. Dwusieczna AI przecina okrąg opisany w punkcie W. Wykaż, że $AI = IW$.

4. Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości środka okręgu opisanego od boków trójkąta jest równa sumie promieni okręgów opisanego i wpisanego.

5. Dowolny okrąg przechodzący przez wierzchołek kąta odcina na jego ramionach odcinki o długościach m i n, a na dwusiecznej o długości k. Wykaż, że stosunek $(m+n)/k$ nie zależy od wyboru okręgu.

6. Niech $ABCDEFG$ to siedmiokąt foremny. Wykaż, że $1/|AC| + 1/|AD| = 1/|AB|$.

7. W trójkąt ABC wpisano półkole tak, że średnica półkola zawiera się w boku BC. Niech F_1, F_2 – punkty styczności z ramionami trójkąta. Dwusieczna $< BAC$ przecina okrąg opisany w punkcie W. Wykaż, że pole trójkąta ABC wynosi $\frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |AW|$.

8. Proste wyznaczone przez dwusieczne kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany odpowiednio w punktach W_1, W_2, W_3. Porównaj sumę $AW_1 + BW_2 + CW_3$ z obwodem trójkąta ABC.