Bardo, listopad 2017 r.

DWA OKRĘGI

1. Okręgi przecinają się w punktach A i B...

a) Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w X i Y. Wykaż, że $< XBY$ nie zależy od wyboru siecznej.

b) Przez A prowadzimy styczne do obu okręgów. Niech M i N – punkty przecięcia stycznych z okręgami. Wykaż, że $< ABN + < MAN = 180°$.

c) Prosta przecina pierwszy okrąg w C i D, drugi w E i F, przy czym E leży pomiędzy C i D. Wykaż, że $< CAE = < DBF$.

d) Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w C i D. Przez C i D prowadzimy styczne, które przecinają się w E. Wykaż, że $< CED$ nie zależy od wyboru siecznej oraz na czworokącie $BCED$ można opisać okrąg.

e) Przez A prowadzimy sieczną, która przecina okręgi w C i D, a przez B sieczną, która przecina okręgi w E i F, przy czym punkty C i E leżą na jednym okręgu, a D i F na drugim. Wykaż, że $< CBD = < EAF$.

f) Przez dowolny punkt X jednego z okręgów prowadzimy prostą XA, która przecina drugi okrąg w Y oraz prostą XB przecinającą drugi okrąg w Z. Wykaż, że prosta YZ jest prostopadła do średnicy pierwszego okręgu o końcu X.

g) Niech O_1 i O_2 – środki okręgów. Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecina okręgi w M i N. Wykaż, że $< O_1MB = < O_2NB$.

h) Przez A prowadzimy cięciwy AC i AD styczne do okręgów. Wykaż, że proste BC i BD są symetryczne względem prostej AB.

i) Okręgi są przystające. Przez jeden z ich punktów wspólnych prowadzimy sieczną. Wykaż, że okrąg o średnicy będącej wspólną cięciwą tych okręgów dzieli odcinek siecznej ograniczony okręgami na pół.

j) Pierwszy okrąg przechodzi przez środek drugiego. Styczna do pierwszego okręgu w B przecina drugi okrąg w C. Wykaż, że $AB = BC$.

k) Okręgi są nieprzystające. Promienie OA i OB mniejszego okręgu przedłużamy do przecięcia się z większym okręgiem odpowiednio w C i D. Wykaż, że $AC = BD$.

l) Niech O_1 i O_2 – środki okręgów. Półproste O_1A i O_2A przecinają okręgi odpowiednio w D i C. Wykaż, że punkty B, D, C, O_1, O_2 leżą na jednym okręgu.

2. Dwa okręgi są styczne wewnętrznie w A. Niech AB będzie średnicą większego z nich. Cięciwa BK większego okręgu jest styczna do mniejszego w C. Wykaż, że AC jest dwusieczną $< BAK$.

3. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie...

a) Przez punkt styczności prowadzimy dwie sieczne. Wykaż, że cięciwy łączące końce siecznych są równoległe.

b) ...w punkcie K. Prowadzimy wspólną styczną zewnętrzną do obu okręgów w A i B. Równolegle do tej stycznej prowadzimy styczną do okręgu z punktem B w punkcie T. Wykaż, że punkty A, K, T są współliniowe.

c) ...w punkcie D. Prosta styczna do jednego z nich w A drugi przecina w B i C. Wykaż, że A jest równoodległy od prostych BD i CD.

d) Punkt A leży na jednym z okręgów i należy do wspólnej stycznej. Niech AB będzie średnicą okręgu. Z B prowadzimy styczną do drugiego okręgu w punkcie M. Wykaż, że $AB = BM$.

4. Na cięciwie AB okręgu o środku O obrano dowolny punkt C. Przez punkty A, O, C poprowadzono okrąg, który przecina wyjściowy w punkcie $D \neq A$. Wykaż, że $CD = CB$.

5. Przez punkt A przecięcia się okręgów poprowadzono dwie sieczne, które przecinają okręgi odpowiednio w punktach B i C oraz D i E. Cięciwy BD i EC przedłużono do przecięcia się w M. Wykaż, że $< BME$ nie zależy od wyboru siecznych.