II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2016

Lifting The Exponent Lemma

1. Wykaż, że dla każdego $a > 2$ zawsze istnieje liczba naturalna $k \neq 1$ taka, że
$$k^2 | a^{a-1} - 1$$
.

2. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite x, y, z takie, że $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$.

3. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że $3^n - 1$ dzieli się przez 2^n.

4. (UNESCO Competition 1995). Niech a, n będą dodatnimi liczbami calkowitymi i p bylo taka nieparzysta liczba pierwsza, ze
$$a^p \equiv 1 \pmod{p^n}$$
wykaz, ze
$$a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$$

5. (Ireland 1996) Wykaż, że jeśli p jest nieparzystą liczbą pierwszą i a, n są dodatnimi liczbami całkowitymi, to z $2^p + 3^p = a^n$ wynika $n = 1$.

6. (Romania TST 2009) Niech $a, n \geq 2$ będą liczbami całkowitymi takimi, że istnieje liczba całkowita $k \geq 2$ taka, że $n | (a-1)^k$. Wykaż, że
$$n | a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1$$
.

7. (IMO ShortList 1991) Znajdź największą liczbę całkowitą k taką, że 1991^k dzieli
$$1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}$$

8. Wykaż, że jeśli $n > 1$ i $a \neq b$ są liczbami całkowitymi różnymi od 0, to $a^n - b^n$ ma dzielnik pierwszy, który nie dzieli $a - b$.

9. (Romania TST 1994) Niech n będzie dodatnią nieparzystą liczbą całkowitą. Wykaż, że
$$((n-1)^n + 1)^2$$
dzieli
$$n(n-1)^{(n-1)^n + 1} + n$$
.

10. (China Western Mathematical Olympiad 2010) Wykaż, że jeśli m i n są nieujemnymi liczbami całkowitymi i $2^{2^m} + 1$ jest liczbą pierwszą, to $n = 2^{m+1} p^k$ jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą
$$2^n \equiv 1 \pmod{p^{k+1}}$$