II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2016

Równania

1. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} xy + xz &= 8 - x^2 \\ xy + yz &= 12 - y^2 \\ yz + zx &= -4 - x^2 \end{cases}$$

2. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x_1(x_1 - 1) &= x_2 - 1 \\ x_2(x_2 - 1) &= x_3 - 1 \\ & \dots \\ x_{n-1}(x_{n-1} - 1) &= x_n - 1 \\ x_n(x_n - 1) &= x_1 - 1 \end{cases}$$

3. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) &= 1 + y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) &= 1 + x^7 \end{cases}$$

4. Wyznacz wszystkie liczby naturalne n oraz ciągi liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takie, że
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} &= 1 \end{cases}$$

5. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{x_2} &= 4 \\ x_2 + \frac{1}{x_3} &= 1 \\ x_3 + \frac{1}{x_4} &= 4 \\ x_4 + \frac{1}{x_5} &= 1 \\ & \dots \\ x_{2017} + \frac{1}{x_{2018}} &= 4 \\ x_{2018} + \frac{1}{x_1} &= 1 \end{cases}$$

6. Pokaż, że nie istnieją liczby całkowite x, y spełniające równanie $15x^2 - 7y^2 = 9$.

7. Rozwiąż równanie $8^x(3x+1) = 4$

8. Znajdź wszystkie rozwiązania w liczbach rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ równania
$$(1 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + \ldots (x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

9. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że
$$f(x+y) - f(x-y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}$$

10. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że
$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x$$