SZEREGI LICZBOWE

SESJA

1. Załóżmy, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny. Czy szereg $\sum (a_{2n-1} + a_{2n})$ jest zbieżny?

2. Pokaż, że jeśli szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ są zbieżne, to zbieżne są także szeregi $\sum (a_n + b_n)$, $\sum c a_n$ oraz $\sum (a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$, $\sum c a_n = c \sum a_n$.

3. Załóżmy, że szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny. Kiedy szereg $\sum c a_n$ jest rozbieżny?

4. Czy jeśli szereg $\sum (a_n + b_n)$ jest zbieżny, to także szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$ są zbieżne?

5. Czy rozbieżny szereg o wyrazach nieujemnych ma sumę ∞?

6. Pokaż, że jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (*warunek konieczny zbieżności*).

7. Szereg $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ nazywamy *ogonem szeregu* $\sum a_n$. Pokaż, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny iff ogon $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

8. Czy poniższe szeregi są zbieżne? Jeśli tak, to podaj ich sumy.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})^n$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$, **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(3n-2)(3n+1)}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sin \sqrt[n]{n}}$, **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n+4^n}{5^n}$, **(g)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{2}{n}$.

9. Czy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ są zbieżne?

10. Niech $\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Udowodnij *kryterium Cauchy'ego*:
• jeśli $\lambda < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,
• jeśli $\lambda > 1$, to szereg $\sum a_n$ jest rozbieżny.
Co można powiedzieć o zbieżności szeregu $\sum a_n$ w przypadku $\lambda = 1$?

11. Zbadaj zbieżność podanych szeregów.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n}$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$, **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{1}{n^4}$, **(e)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{1}{n}}{3^n}$,
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+5n}}$, **(g)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$, **(h)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n \cdot n!}{n^n}$, **(i)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$, **(j)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1}$,
(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, **(l)** $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^3 \frac{1}{n}$, **(m)** $\sum_{n=1}^{\infty} n (\frac{3}{5})^n$, **(n)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-\frac{4}{3})^n \frac{1}{n^2}$, **(o)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$,
(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$, **(r)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n^2+n}-n)}$, **(s)** $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$, **(t)** $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{n})^n$,
(u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, gdzie $a_n = 1$ dla n nieparzystych i $a_n = 3$ dla n parzystych, **(w)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

12. Pokaż, że szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

13. Zbadaj zbieżność podanych szeregów. W przypadku zbieżności określ, czy jest to zbieżność warunkowa, czy bezwzględna.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ dla $\alpha > 0$, **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \sin \sqrt{n}}{n^3}$, **(c)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2n-1}$, **(d)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$,
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$, **(f)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 \frac{(2n-1)\pi}{2}}{\sqrt[3]{n^2}}$.

14. Pokaż, że szereg warunkowo zbieżny ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych i nieskończenie wiele wyrazów dodatnich.

15.* Czy jeśli szereg $\sum a_n^2$ jest zbieżny, to szereg $\sum \frac{1}{n} a_n$ jest zbieżny?

16.* Czy jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum n a_n^2$ jest zbieżny?

17.* Czy jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny i wszystkie a_n są nieujemne, to $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$?

18.* Czy istnieje szereg, który dla dowolnej liczby rzeczywistej po odpowiednim pogrupowaniu wyrazów jest do niej zbieżny?

Przemysław Szczepaniak