

Ułamki łańcuchowe

Michał Szachniewicz

1. Spróbuj zapisać kilka znanych tobie liczb wymiernych w postaci ułamków łańcuchowych, czy współczynniki liczb wymiernych będących blisko siebie są do siebie podobne?
2. Pokaż, że każda liczba wymierna daje się zapisać w skończony sposób jako ułamek łańcuchowy.
3. Zauważ, że zapis taki jest jednoznaczny. Rozwiąż następujące równania w obrębie liczb naturalnych:
 - (a) $2xy + 2 = 3y$
 - (b) $7(xyz + x + z) = 10(yz + 1)$
 - (c) $55(x^3y^3 + x^2 + y^2) = 229(xy^3 + 1)$
4. Zapisz wzorem rekurencyjnym wartości ułamków łańcuchowych złożonych z n jedynek. Czy taki ciąg jest zbieżny? Do czego?
5. Zapisz następujące liczby w postaci ułamków łańcuchowych:
 - (a) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$
 - (b) $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}$
 - (c) $\sqrt{14}, \sqrt{42}$
6. Dany jest ciąg liczb naturalnych większych od zera (a_n) . Odpowiedz na następujące pytania:
 - (a) Jak zapisać ciąg (A_n) powstały z ułamków łańcuchowych złożonych z coraz większej ilości wyrazów tego ciągu?
 - (b) Czy jest możliwe, by ciąg (A_n) był zbieżny do liczby wymiernej?
 - (c) * Kiedy (A_n) jest ciągiem zbieżnym?
7. Dana jest liczba niewymierna r . Wyraż wzorem kolejne wyrazu z jej zapisu ułamkiem łańcuchowym. Wywnioskuj, że różne liczby niewymierne mają różne ciągi łańcuchowe.
8. Zauważ, że ułamki łańcuchowe pozwalają kodować liczby niewymierne w postaci ciągów liczb naturalnych dodatnich oraz ciągi liczb naturalnych jako liczby niewymierne.
9. * Rozważmy odwzorowanie F z przestrzeni ciągów, do liczb rzeczywistych, o którym mowa w poprzednim zadaniu. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje n , takie, że jeśli dwa ciągi różnią się dopiero za n -tym miejscem, to ich obrazy względem F różnią się o mniej niż ε .
10. * Pokaż, że dla każdego n istnieje ε , że jeśli liczby niewymierne r i s są bliżej siebie niż ε , to ich ciągi różnią się dopiero za n -tym miejscem.
11. Zastanów się, czy można jakoś uogólnić pojęcie ułamka łańcuchowego. Jakie własności mają ułamki gdy jedynki zastąpimy dwójkami lub kolejnymi liczbami naturalnymi? Zapisz liczbę π , gdy jedynki zastąpimy kwadratami kolejnych liczb nieparzystych (możesz użyć kalkulatora).
12. * Rozważmy równanie $x^2 - Dy^2 = 1$ (równanie Pella). Czy równanie ma rozwiązanie jeśli D jest kwadratem liczby naturalnej? Pokaż, że gdy tak nie jest, to $(x, y) = (l_m, n_m)$ (dla pewnego m) spełniają równanie, gdzie (l_m, n_m) to m -te przybliżenie \sqrt{D} ułamkiem łańcuchowym.
Uwaga! Możesz przeczytać o tym w Teorii liczb, Wacława Sierpińskiego (Monografie matematyczne, tom 19)