II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2017

Geometria

Marcin Sidorowicz

Teoria: Twierdzenie Menelaosa. Potęga punktu względem okręgu. Okrąg Feuerbacha. Proste Čevy (środkowe, dwusieczne, symetralne, symediany), twierdzenia o symedianie, twierdzenie Čevy. Twierdzenie Stewarta. Twierdzenie Simsona.

Zadania

1. Udowodnij twierdzenie Menelaosa.
2. Udowodnij, że definicja potęgi punktu jest dobrze określona, tzn. nie zależy od wyboru prostej przechodzącej przez punkt i przecinającej okrąg.
3. *Osią potęgową* dwóch okręgów o różnych środkach nazywamy zbiór punktów mających równe potęgi względem tych okręgów. Udowodnij, że oś potęgowa jest prostą prostopadłą do prostej łączącej środki tych okręgów.
4. Niech AD, BE, CF będą trzema czewianami w trójkącie ABC. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{AF}{FB} + \frac{BD}{DC} + \frac{CE}{EA}$.
5. Wykaż, że symediany trójkąta przecinają się w jednym punkcie (tzw. *punkcie Lemoine'a*).
6. W trójkącie ABC wpisanym w okrąg, symediana wychodząca z wierzchołka A przecina okrąg w punkcie D. Oznaczamy środe k odcinka AD przez M. Wykaż, że $\angle BMD = \angle DMC = \angle BAC$.
7. W trójkącie ABC punkty D, E, F są punktami styczności okręgu weń wpisanego. Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.
8. W czworokącie $ABCD$ punkt M jest środkiem przekątnej AC. Wykaż, że jeżeli $\angle DMA = \angle AMB = \angle DCB$, to na tym czworokącie można opisać okrąg.
9. Udowodnij twierdzenie Stewarta.
10. Cztery proste przecinają się w sześciu punktach i tworzą cztery trójkąty. Wykaż, że okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny.
11. W okrąg O wpisujemy trójkąt ABC i oznaczamy jego ortocentrum przez H. Niech X, Y, Z będą odbiciami punktu P względem boków trójkąta ABC. Wykaż, że X, Y, Z, H leżą na jednej prostej.

Zadania olimpijskie

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej na bok BC, a H jest dowolnym punktem wewnętrznym tej wysokości. Proste BH i CH przecinają boki AC i AB danego trójkąta odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że $\angle EDH = \angle FDH$.

2. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o środku O i promieniu R. Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że jeżeli są one prostopadłe, to $EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = 4R^2$.

3. Na bokach AB i AC trójkąta ABC obrano takie punkty L i M, że $5AL = 2AB$ i $4AM = 3AC$. Odcinki BM i CL przecinają się w punkcie P, a odcinki AP i BC w punkcie N. Wyznacz $\frac{BN}{BC}$.

4. Dane są trzy punkty A, B, C leżące kolejno na jednej prostej. Przez A i C przeprowadzamy okrąg O tak, by jego środek nie leżał na prostej AC. Niech P będzie punktem przecięcia stycznych do okręgu w punktach A i C, i niech Q będzie punktem przecięcia odcinka PB z okręgiem O. Wykaż, że punkt przecięcia dwusiecznej $\angle AQC$ i odcinka AC nie zależy od wyboru okręgu.