II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2017

Teoria liczb

Marcin Sidorowicz

Teoria: Zasada indukcji matematycznej. Liczby pierwsze, podzielność i jej własności. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki. Układy kongruencji, twierdzenie Eulera (w tym MTF), chińskie twierdzenie o resztach. Własności liczb pierwszych.

Oznaczenia: $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{P}$ - zbiór liczb pierwszych. Liczby n, m, k domyślnie oznaczają liczby naturalne.

Zadania

1. Udowodnij, że dla każdego n liczba $4^{2n+1} + 3^{3n+2}$ jest wielokrotnością liczby 13.
2. Udowodnij następujący wzór: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. Wykaż, że jeżeli $(a, b) = 1$ i $b|ac$, to $b|c$.
4. Z poprzedniego zadania wywnioskuj, że:
   (a) Jeżeli $a|c$ oraz $b|c$ i $(a, b) = 1$, to $ab|c$,
   (b) Jeżeli $(a, b) = 1$ i $(a, c) = 1$, to $(a, bc) = 1$,
   (c) Jeżeli $(a, b) = 1$, to $(a^n, b) = 1$, a dalej $(a^n, b^m) = 1$.
5. Wykaż, że:
   (a) $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$
   (b) $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}] = [[a_1, a_2, \ldots, a_n], a_{n+1}]$
6. Wykaż, że $(a, b) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie naturalne x, y, że $ax + by = 1$.
7. Wykaż, że iloczyn k kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez $k!$.
8. Udowodnij, że dla dowolnego n, $\sqrt{n}$ jest albo naturalne, albo niewymierne.
9. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ i $m \in \mathbb{N}$. Udowodnij następujące własności kongruencji:
   (a) Jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$ i $c \equiv d \pmod{m}$, to
      i. $a + b \equiv c + d \pmod{m}$,
      ii. $a - b \equiv c - d \pmod{m}$,
      iii. $ab \equiv cd \pmod{m}$.
   (b) Jeżeli $ad \equiv bd \pmod{m}$ i $(d, m) = 1$, to $a \equiv b \pmod{m}$.

(c) Jeżeli $a \equiv b \pmod{m}$, to $(a, m) = (b, m)$.

10. Oblicz resztę z dzielenia 2017^{2018} przez 37.
11. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczb 9^{9^9}, $7^{9^{9^9}}$.
12. Pokaż, że istnieje 2017 kolejnych liczb naturalnych, z których każda jest podzielna przez kwadrat liczby naturalnej.
13. Wykaż, że dwie różne liczby Fermata są względnie pierwsze.
14. Wykaż, że w ciągu $6n + 5$ jest nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Problemy

1. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $4k + 1$.
2. Udowodnij, że dla dowolnego n liczba $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita.
   (a) Ogólniej: Udowodnij, że dla dowolnych n, k liczba $\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{k+n}$ nie jest całkowita.
   (b) Jeszcze ogólniej: Udowodnij, że dla dowolnych n, k i dowolnych kombinacji znaków $+, -$ liczba $\pm\frac{1}{k} \pm \frac{1}{k+1} \pm \ldots \pm \frac{1}{k+n}$ nie są całkowita.
3. Wykaż, że ostatnie cyfry liczb n^{n^n} dla kolejnych $n \in \mathbb{N}$ tworzą ciąg okresowy.