Bardo, listopad 2017

WIELOMIANY, C.D.

1. Wielomiany i podzielność

1. [46OM] Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli liczba $P(5)$ dzieli się przez 2, a liczba $P(2)$ dzieli się przez 5, to liczba $P(7)$ dzieli się przez 10.

2. Wykaż, że dla każdego wielomianu $P(x) \not\equiv x$ wielomian $P(P(P(x))) - x$ dzieli się przez $P(x) - x$.

3. [54OM] Wyznaczyć wszystkie wielomiany W o współczynnikach całkowitych, spełniające następujący warunek: dla każdej liczby naturalnej n liczba $2^n - 1$ jest podzielna przez $W(n)$.

4. Niech f bedzie wielomianem stopnia $n \geq 1$ o współczynnikach całkowitych. Dowieść, że jeżeli dla co najmniej $2n+1$ różnych wartości całkowitych a liczba $|f(a)|$ jest liczbą pierwszą lub równą 1, to wielomian f nie jest iloczynem dwóch wielomianów stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych.

5. [49OM] Niech $g(k)$ będzie największym dzielnikiem pierwszym liczby całkowitej k, gdy $|k| > 2$, oraz niech $g(-1) = g(0) = g(1) = 1$. Rozstrzygnąć, czy istnieje taki wielomian W stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych, dla którego zbiór liczb postaci $g(W(x))$ (x — całkowite) jest skończony.

6. [55OM] Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), \ldots, W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby $W_1(a)$, $W_2(a)$, $W_3(a)$, ..., $W_n(a)$ są złożone.

7. [55OM] Dane są wielomiany $W_1(x), W_2(x), W_3(x), \ldots, W_n(x)$ stopnia co najmniej 1, o współczynnikach całkowitych. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej a wszystkie liczby $W_1(a)$, $W_2(a)$, $W_3(a)$, ..., $W_n(a)$ są złożone.

8. [48OM] Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x) + 5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

9. [57OM] Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2 + ax + b) \cdot P(x)$ jest wielomianem postaci $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, gdzie każda z liczb $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

2. Wzory Viete'a

Zakładając, że wielomian stopnia n ma n pierwiastków rzeczywistych (licząc z krotnościami) możemy zawsze napisać:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach, otrzymujemy wzory Viete'a:

$$\begin{aligned} x_1 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

10. Załóżmy, że wielomian $W(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ma n pierwiastków. Wyraź
   (a) sumę kwadratów pierwiastków;
   (b) sumę trzecich potęg pierwiastków;
   (c) sumę odwrotności pierwiastków

   za pomocą $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

11. Udowodnij, że jeśli wielomian $W(x)$ jak wyżej ma n pierwiastków rzeczywistych, to $a_{n-2} \leq \frac{n-1}{2n} a_{n-1}^2$.

3. Rozkładalność wielomianów

W rozdziale tym jesteśmy zainteresowani wielomianami o współczynnikach całkowitych. Będziemy się głównie zajmowali pytaniem: jak dla pewnej liczby rzecywistej x (np. $\sqrt[3]{2}, \sqrt{2} + \sqrt{3}$) znaleźć wielomian o współczynnikach całkowtych i możliwie najmniejszym stopniu (tzw. *wielomian minimalny*), którego pierwiastkiem jest liczba x. Często łatwo znajdziemy taki wielomian, ale trudniej będzie uzasadnić, że jest to wielomian najniższego możliwego stopnia.

Twierdzenie 1. *[Kryterium Eisensteine'a] Dany jest wielomian o współczynnikach całkowitych $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Jeśli istnieje liczba pierwsza p taka, że:*

$$p \nmid a_n, p | a_{n-1}, p | a_{n-2}, \ldots, p | a_1, p | a_0, p^2 \nmid a_0,$$

II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej, materiały przygotował: Marcin Preisner .

to wielomianu $W(x)$ nie da się przedstawić jako iloczyn dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych stopni niższych niż $\deg(W)$.

12. O których z poniższych wielomianów potrafisz rozstrzygnąć, że są nierozkładalne bezpośrednio stosując kryterium Eisenteina:
$$x^4+6x^2-18x+12, \quad x^4+21x^3-3x^2+49, \quad x^5-10x^2+50.$$

13. Udowodnij, że wielomian $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}$ nie rozkłada się na iloczyn dwóch wielomianów, które mają stopnie dodatnie i współczyniki całkowite.

14. Znaleźć wielomian o współczynnikach całkowitych najniższego możliwie stopnia, którego pierwiastkiem jest liczba:
(a) $a=\sqrt{2}$,
(b) $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$,
(c) $a=2\sqrt{3}-\sqrt{7}$,
(d) $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{6}}$,
(e) $a=\sqrt{3-\sqrt[4]{3}}$,
(f) $a=\sqrt[5]{7}$,
(g) $a=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

4. Zadania rozmaite

12. [47OM] Rozstrzygnąć, czy każdy wielomian o współczynnikach całkowitych jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

13. [51OM] Wielomian $w(x)$ stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych przyjmuje dla liczb całkowitych x wartości będące kwadratami liczb całkowitych. Dowieść, że wielomian $w(x)$ jest kwadratem pewnego wielomianu.

14. [53OM] Dowieść, że wykres wielomianu $W(x)$ stopnia większego od 1 ma oś symetrii wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie wielomiany $F(x)$ i $G(x)$, że $W(x)=F(G(x))$, przy czym $G(x)$ jest stopnia 2.

15. [54OM] Dany jest wielomian $W(x)=x^4-3x^3+5x^2-9x$. Wyznaczyć wszystkie pary różnych liczb całkowitych a, b spełniajacych równanie $W(a)=W(b)$.

16. [55OM] Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych, przyjmującym dla pewnych dwóch różnych liczb całkowitych wartości względnie pierwsze. Dowieść, że istnieje nieskończony zbiór liczb całkowitych, dla których wielomian W przyjmuje wartości parami względnie pierwsze.

17. [56OM] Dany jest wielomian $W(x)=x^2+ax+b$, o współczynnikach całkowitych, spełniający warunek: *Dla każdej liczby pierwszej p istnieje taka liczba całkowita k, że liczby $W(k)$ oraz $W(k+1)$ są podzielne przez p*. Dowieść, że istnieje liczba całkowita m, dla której $W(m)=W(m+1)=0$.

18. [58OM] Wielomian W o współczynnikach rzeczywistych przyjmuje w przedziale $\langle a;b\rangle$ (gdzie $a<b$) tylko wartości dodatnie. Udowodnić, że istnieją takie wielomiany P oraz $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, że
$$W(x)=(P(x))^2+(x-a)(b-x)\sum_{i=1}^{m}(Q_i(x))^2$$
dla każdej liczby rzeczywistej x.

19. [58OM] Wielomian $P(x)$ ma współczynniki całkowite. Udowodnić, że jeżeli wielomiany $P(x)$ oraz $P(P(P(x)))$ mają wspólny pierwiastek rzeczywisty, to mają także wspólny pierwiastek całkowity.