Bardo, listopad 2017

WIELOMIANY

Wielomianem nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Zwykle zakładamy, że $a_n \neq 0$ i mówimy wtedy, że stopień W jest równy n ($\deg(W) = n$). Liczby a_n nazywamy współczynnikami, x jest zmienną rzeczywistą (choć w przyszłości będziemy mogli rozważać zmienne zespolone i inne). Współczynnik a_0 nazywamy wyrazem wolnym. Pierwiastkiem jest liczba x, taka że $W(x) = 0$. Wielomiany łatwo można dodawać, odejmować, mnożyć. Możliwe jest też dzielenie z resztą (ale o tym trochę później).

1. Współczynniki i pierwiastki

Możliwe, że najważniejszym twierdzeniem dotyczącym wielomianów jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *[Bézout] Liczba a jest pierwiastkiem $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x) = (x-a)P(x)$ dla pewnego wielomianu $P(x)$.*

Z powyższego twierdzenia wynikają kluczowe własności wielomianów:

- wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków,
- jeśli wielomian $W(x)$ stopnia n ma $n+1$ pierwiastków, to $W(x) = 0$,
- jeśli dwa wielomiany stopnia co najwyżej n zgadzają się w $n+1$ punktach, to są sobie równe.

Zadania.

1. Znajdź wszystkie wielomiany spełniające

$$(W(x))^2 = W(x^2).$$

2. [59OM] Wyznaczyć wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość

$$W(x^2) \cdot W(x^3) = (W(x))^5.$$

3. Wynacz wszystkie wielomiany $P(x)$ spełniające dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y równość

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)P(x-y).$$

4. Udowodnij, że wielomian $W(x) = x$ nie jest sumą trzecich potęg wielomianów o współczynnikach całkowitych.

5. Dany jest wielomian $P(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^2$. Niech $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_m x^m$ będzie wielomianem określonym wzorem $Q(x) = P(x) \cdot P(x^3) \cdot P(x^9) \cdot P(x^{27}) \cdot P(x^{81})$. Oblicz sumę $|b_0| + |b_1| + |b_2| + ... + |b_m|$.

6. [51OM] Stopień wielomianu $P(x)$ o współczynnikach rzeczywistych jest nieparzysty. Ponadto dla każdego x

$$P(x^2 - 1) = (P(x))^2 - 1.$$

Udowodnić że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość $P(x) = x$.
[*Wskazówka1: znajdź nieskończony ciąg rosnący punktów x_n takich, że $W(x_n) = x_n$*]
[*Wskazówka2: rozważ współczynniki przy parzystych potęgach, a następnie współczynniki przy nieparzystych potęgach.*]

7. [50OM] Dana jest liczba naturalna $n \geq 2$. Wyznaczyć wszystkie wielomiany $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ mające dokładnie n pierwiastków nie większych niż -1 oraz spełniające warunek

$$a_0^2 + a_1 a_n = a_n^2 + a_0 a_{n-1}.$$

8. [52OM] Niech $n-3$ będzie liczbą naturalną. Dowieść, że dowolny wielomian postaci

$$x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + a_{n-5}x^{n-5} + ... + a_1 x + a_0,$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych $a_0, a_1, ..., a_{n-3}$ jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych.

9. [54OM] Znaleźć wszystkie wielomiany W o współczynnikach rzeczywistych, mające następującą własność: jeśli $x+y$ jest liczbą wymierną, to $W(x) + W(y)$ jest liczbą wymierną.

10. Niech a, b, c będą trzema różnymi pierwiastkami wielomianu $P(x) = 3x^3 - 3x + 1$. Znaleźć sumę kwadratów współczynników wielomianu $Q(x) = (x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$.

II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej, materiały przygotował: Marcin Preisner .

11. [55OM] Niech c będzie taką liczbą rzeczywistą, że wielomian $P(x) = x^5-5x^3+4x-c$ ma pięć różnych pierwiastków rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Wyznaczyć, w zależności od c, sumę wartości bezwzględnych współczynników wielomianu

$$Q(x) = (x-x_1^2)(x-x_2^2)(x-x_3^2)(x-x_4^2)(x-x_5^2).$$

12. Znajdź wszystkie takie wielomiany $W(x)$, że $W(0) = 0$ oraz dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$W(x) = \frac{1}{2}\left(W(x-1)+W(x+1)\right).$$

13. Znajdź wszystkie wielomiany $W(x)$ spełniające

$$xW(x-1) = (x-2)W(x).$$

14. Niech W będzie wielomianem stopnia n. Wiadomo, że dla każdej liczby $i = 0, 1, \ldots, n$ prawdziwa jest równość $W(i) = \frac{1}{i+1}$. Znajdź wartość $F(n+1)$.

15. Wielomian W stopnia n spełnia dla każdego $i = 0, \ldots, n$ równość $W(i) = \frac{i}{i+1}$. Znajdź wartość $W(n+1)$.

16. [48OM] Wielomian $P(x)$ stopnia n spełnia warunek

$$P(k) = \frac{1}{k} \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n.$$

Obliczyć $P(0)$.

17. [48OM] Dana jest liczba naturalna $m \geq 1$ oraz wielomian $P(x)$ stopnia dodatniego o współczynnikach całkowitych mający co najmniej trzy różne pierwiastki całkowite. Dowieść, że wielomian $P(x)+5^m$ ma co najwyżej jeden pierwiastek całkowity.

18. [57OM] Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych a, b, dla których istnieje taki wielomian $P(x)$ o współczynnikach całkowitych, że iloczyn $(x^2+ax+b)\cdot P(x)$ jest wielomianem postaci $x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1x + c_0$, gdzie każda z liczb $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ jest równa 1 lub -1.

2. Dzielenie wielomianów

Mówimy, że $W(x)$ jest podzielny przez $V(x)$, jeśli istnieje wielomian $P(x)$ taki, że $W(x) = V(x)P(x)$. Ogólniej, każdy wielomian $W(x)$ można podzielić (jednoznacznie) przez $V(x) \neq 0$ otrzymując wynik $P(x)$ i resztę $R(x)$, takie że:

- $W(x) = P(x)V(x) + R(x)$,
- stopień $R(x)$ jest ściśle mniejszy niż stopień $V(x)$.

Dzielenie wielomianów ma podobne własności do dzielenia liczb całkowitych. W szczególności możemy zdefiniować $\mathrm{NWD}(P,Q)$ i $\mathrm{NWW}(P,Q)$ dla dwóch wielomianów P i Q (przez "największy" i "najmniejszy" rozumiemy stopień wielomianu nie przejmując, tym że jest to wyznaczone z nie do końca jednoznacznie, tzn. $\mathrm{NWD}(x^2-1, x^3-1) = x-1$, ale równie dobrze wynik mógłby być $2x-2$).

Zadania.

19. Wielomian W daje z dzielenia przez $x-1$ resztę 1, a z dzielenia przez $x-2$ resztę 2. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu W przez $(x-1)(x-2)$.

20. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3+x^2-x+1$ przez $x-1$, $x-2$ oraz $x+1$. Ile wynosi $W(1)$, $W(2)$, $W(-1)$?

21. Wyznacz możliwie najszybciej resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^7-3x^6+x^3+2x^2+3$ przez $V(x) = x-2$.

22. Niech $W(x) = x^4-2x^3-7x^2+x+2$, $V(x) = x^2+x-2$. Podziel $W(x)$ przez $V(x)$ z resztą.

23. Nie korzystając z wyników poprzedniego zadania, policz wartość reszty dla $x = 1$ i $x = -2$.

24. Znajdź wielomiany stopnia 1, które dla $x = 1$ i $x = -2$ mają wartości takie, jak znalezione powyżej.

25. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x) = x^{1000}$ przez $V(x) = x^2-3x+2$.

26. Czy metoda użyta do rozwiązania poprzedniego zadania zadziała dla $V(x) = x^2-2x+1$? A dla $V(x) = x^2+1$?

27. Znajdź wielomian możliwie najniższego stopnia, który przy dzieleniu przez x^2+1 daje resztę x, a przy dzieleniu przez x^2-1 — resztę 1.

28. Znajdź $\mathrm{NWD}(W(x), V(x))$, gdzie $W(x) = x^4+x^2+x-1$, $V(x) = x^4+x^3-x^2+1$. Znajdź $P(x)$ i $Q(x)$ takie, że $\mathrm{NWD}(W(x), V(x)) = P(x)W(x) + Q(x)V(x)$.

29. Znaleźć wielomian o współczynnikach całkowitych najniższego możliwie stopnia, którego pierwiastkiem jest liczba $a = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

30. [47OM] Wielomian o współczynnikach całkowitych daje przy dzieleniu przez wielomian $x^2-12x+11$ resztę $990x-889$. Wykazać, że wielomian ten nie ma pierwiastków całkowitych.

31. [47OM] Wyznaczyć wszystkie pary (n, r), gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, r zaś liczbą rzeczywistą, dla których wielomian $(x+1)^n - r$ jest podzielny przez wielomian $2x^2+2x+1$.