Bardo, listopad 2017

INDUKCJA MATEMATYCZNA

Zakładamy, że zdanie $\Psi(n)$ coś twierdzi ($n \in \mathbb{N}$). Musi być prawdziwe lub fałszywe dla każdego n (np. $\Psi(n)$ =spełnione jest $n^3 - 6n < 100$łub $\Psi(n)$ ="w tym mieście żyje więcej niż n kotówłub $\Psi(n)$ =Łiczba $n+1$ jest większa od n"). Indukcja to metoda pokazywania, że pewne zdanie $\Psi(n)$ jest zawsze prawdziwe.

Twierdzenie 1. *Zdanie $\Psi(n)$ jest spełnione jeśli spełnione są oba warunki:*

- $\Psi(1)$ *jest spełnione, (to zwykle łatwo sprawdzić, bo to tylko jeden, konkretny przypadek)*
- *Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ z prawdziwości $\Psi(n)$ można wywnioskować prawdziwość $\Psi(n+1)$. (formalnie: $\forall n \in \mathbb{N}\ \Psi(n) \Rightarrow \Psi(n+1)$)*

1. Udowodnij wzory:
   (a) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,
   (b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$,
   (c) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
   (d) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
   (e) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

2. Zgadnij wzór na poniższe wyrażenie i udowodnij go indukcyjnie.

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

3. Dygresja: wymyśl na nowo wzór na wyrażenie z poprzedniego zadania korzystając z równości: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Potem podobnie policz sumę:

$$\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)\cdot(3n+2)}.$$

4. Udowodnij, że:
   (a) $5 | n^5 - n$,
   (b) $6 | n^3 + 5n$,
   (c) $19 | (5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1})$.

5. Udowodnij nierówności:
   (a) $2^n > 2n + 1$ ($n > 2$),
   (b) $(1+x)^n \geq 1 + nx$ ($x > -1$, jest to tzw. nierówność Bernoulliego),
   (c) $n(n+1) \leq 2^n + 4$,
   (d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$,
   (e) $4^n > n^3$,
   (f) $(n+1)^n < n^{n+1}$ ($n > 3$).

6. Policz indukcyjnie, że zbiór, który ma n elementów, ma dokładnie 2^n podzbiorów.

7. Na ile maksymalnie części rozcina płaszczyznę n prostych?

8. Na ile maksymalnie części rozcina przestrzeń n płaszczyzn?

9. Udowodnij, że każdą kwotę n zł ($n \geq 4$) można rozmienić na dwuzłotówki i pięciozłotówki.

10. Udowodnij, że kwadrat można podzielić na każdą większą od 5 liczbę kwadratów (być może różnej wielkości).

11. Udowodnij, że sześcian można podzielić na każdą większą od 199 liczbę sześcianów (być może różnej wielkości).

12. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie: $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że $a_n = 2\cdot 3^n - 3\cdot 2^n$.

13. Ciąg f_n zadany jest rekurencyjnie: $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$ (tak więc $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$, $f_5 = 8$, $f_6 = 13$ itd. – każdy wyraz jest sumą dwóch poprzednich). Udowodnij, że

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

14. Ciąg a_n zadany jest rekurencyjnie: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Policz kilka początkowych wyrazów tego ciągu, zgadnij wzór na n-ty wyraz, a następnie udowodnij ten wzór przez indukcję.

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

wedle następującego planu:
   (a) udowodnij ją dla $n = 2$,
   (b) udowodnij, że jeśli jest ona prawdziwa dla $n = k$, to jest też prawdziwa dla $n = 2k$,
   (c) udowodnij, że jeśli $k < \ell$ i nierówność jest prawdziwa dla $n = \ell$ to jest też prawdziwa dla $n = k$,
   (d) wyciągnij konkluzję.

II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej, materiały przygotował: Marcin Preisner .

16. Jeśli ustawimy w kręgu n osób (ponumerowanych od 1 do n) i poczynając od osoby z numerem 1 będziemy eliminować co drugą osobę, to po $n-1$ eliminacjach zostanie jedna osoba, oznaczmy jej numer przez $J(n)$. Udowodnij, że w zapis dwójkowy $J(n)$ otrzymujemy przez przestawienie pierwszej cyfry w zapisie dwójkowym n na koniec.

17. Załóżmy, że $x+\frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że $x^n+\frac{1}{x^n}$ jest liczbą całkowitą dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

18. Boki pewnego wielokąta wypukłego zaznaczono z zewnątrz cienką kolorową linią. W wielokącie zaznaczono kilka przekątnych i każdą z nich - również z jednej strony - zaznaczono cienką kolorową linią. Wykaż, że wśród wielokątów, na które narysowane przekątne dzielą wyjściowy wielokąt, istnieje taki, którego wszystkie boki są zaznaczone z zewnątrz.

19. Dana jest liczba naturalna k. Dowiedź, że z każdego zbioru liczb całkowitych, mających więcej niż 3^k elementów możemy wybrać $(k+1)$-elementowy podzbiór S o następującej własności:
Dla dowolnych dwóch różnych od siebie podzbiorów $A, B \subset S$ suma wszystkich elementów z A jest rózna od sumy wszystkich elementów z B.

20. Udowodnij, że dla każdego $n \in \mathcal{N}$ $(n-1)^2$ jest dzielnikiem liczby $n^n - n^2 + n - 1$.

21. Udowodnij, że dla różnych liczb całkowitych a, b, c i dowolnej liczby naturalnej n poniższa liczba jest calkowita:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)} \frac{c^n}{(c-a)(c-b)}.$$

22. Na pustyni na drodze w kształcie okręgu jest pewna liczba stacji benzynowych, a na każdej pewna ilość paliwa. Wiadomo, że paliwa na wszystkich stacjach łącznie wystarcza do przejechania drogi naokoło. Udowodnij, że istnieje stacja, taka że samochód startujący z tej stacji jadąc w wybraną stronę przejedzie całą drogę naokoło.

23. (Inna indukcja) Załóżmy, że wiemy, że pewne $\Psi(n_0)$ jest prawdziwe oraz $\Psi(n) \Rightarrow \Psi(n+a)$ i $\Psi(n) \Rightarrow \Psi(n+b)$ dla pewnych naturalnych a, b. Dla jakich a, b można stwierdzić, że $\Psi(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich n ew. z wyjątkiem skończonej liczby początkowych?

24. Dane są klocki o kształcie sześcianu o wymiarach $2\times2\times2$ z usuniętym narożnikiem $1\times1\times1$. Używając tych klocków zbuduj sześcian o wymiarach $2^n \times 2^n \times 2^n$ z usuniętym narożnikiem $1\times1\times1$.

25. Niech $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych takich, że $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $a_n^2 \le a_n - a_{n+1}$. Udowodnij, że $a_n < \frac{1}{n}$ dla każdego $n \in \mathbf{N}$.

26. Pewnych$N$ ludzi nie zna się. Należy pozaznajamiać ich między sobą tak, by żadnych trzech nie miało tej samej liczby znajomych. Udowodnij, że można to zrobić (dla dowolnego N).

27. Dane jest n punktów $(n>4)$. Udowodnij, ˙że można je połączyć strzałkami tak, by od każdego punktu do każdego innego można się było dostać w jednym lub dwóch krokach. (Każde dwa punkty można łączyć strzałką tylko w jednym kierunku; po strzałkach można iść tylko zgodnie z ich kierunkiem.)