II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2017

Nierówności

Maciej Dulęba

Zadania:

1. Pokaż, że $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ dla liczb $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
2. **[Nierówność Cauchy'ego-Schwarza]** Pokaż, że dla $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots a_nb_n)^2$
3. Pokaż, że dla $a_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leq \sqrt{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2}$.
4. Pokaż, że dla $a_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n |a_i|^{2/3})(\sum_{i=1}^n |a_i|^{4/3})$.
5. Pokaż, że dla $a_i, b_i > 0$ zachodzi $(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n}) \geq \frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{b_1+b_2+\ldots b_n}$.
6. Pokaż, że dla $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i)^4 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)^2(\sum_{i=1}^n b_i^4)(\sum_{i=1}^n c_i^4)$.
7. Pokaż, że dla $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)(\sum_{i=1}^n c_i^2)$.
8. Pokaż, że dla $a_i \in \mathbb{R}$ zachodzi $(\sum_{i=1}^n a_i)^2 + (\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i)^2 \leq (n+2)(\sum_{i=1}^n a_i^2)$.

---

9. Pokaż, że dla $a, b, c > 1$ spełniających $1/a + 1/b + 1/c = 2$ zachodzi $\sqrt{a+b+c} \geq \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1}$.
10. Niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta ABC. Niech D, E, F będą rzutami prostopadłymi P na proste BC,CA i AB odpowiednio. Znajdź wszystkie P dla których minimalizowane jest wyrażenie
$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$
11. Pokaż, że dla $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ spełniających $abc = 1$ zachodzi $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.
12. Pokaż, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi $\sqrt{a^4 + a^2b^2 + b^4} + \sqrt{b^4 + b^2c^2 + c^4} + \sqrt{c^4 + c^2a^2 + a^4} \geq a\sqrt{2a^2 + bc} + b\sqrt{2b^2 + ac} + c\sqrt{2c^2 + ab}$.
13. [Nierówność Carlemana] Pokaż, że dla $a_i \in \mathbb{R}_+$ zachodzi $\sum_{i=1}^{\infty}(a_1a_2\ldots a_i)^{1/i} \leq e\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
14. Pokaż, że dla $a, b, c \geq 1$ spełniających $\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{c^2-1} = 1$ zachodzi $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \leq 1$.
15. Znajdź największe rzeczywiste a, że dla każdego $n \geq 1$ i liczb rzeczywistych $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ zachodzi $\frac{1}{x_1-x_0} + \frac{1}{x_2-x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n-x_{n-1}} \geq a(\frac{2}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \ldots + \frac{n+1}{x_n})$.