II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej
Bardo, 13-17 listopada 2016

Zasada Dirichleta: grupa B

Kamil Szubiński

Zadania

1. Wykaż, że z danych $n+1$ liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica jest podzielna przez n
2. Spośród liczb 1, 2, 3, ... , 9 wybrano sześć. Udowodnij, że spośród wybranych liczb można wybrać dwie, których suma wynosi 10.
3. W kwadracie o boku 4 leży 17 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy takie dwa, że ich odległość jest mniejsza lub równa $\sqrt{2}$.
4. Pokaż, że wśród jakichkolwiek 52 liczb całkowitych istnieją dwie, których suma lub różnica jest podzielna przez 100.
5. Spośród liczb $1, 2, \ldots, 2n$ wybrano $n+1$ sztuk. Dowieść, że wśród wybranych są trzy takie, że jedna z nich jest sumą pozostałych.
6. W trójkącie równobocznym o boku 12 umieszczono 300 punktów. Pokaż, że pewne 3 z nich tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.
7. Danych jest 6 niewspółlinowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.
8. Danych jest 66 niewspółlinowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego, żółtego, zielonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.
9. Uzasadnij, że wśród liczb 1, 11, 111, ... jest liczba podzielna przez 2009.
10. Wykaż, że wśród liczb: $7, 7^2, 7^3, \ldots$ istnieje taka, której zapis dziesiętny kończy się na 001.
11. Udowodnij, że dla dowolnych $2^{n-1}+1$ podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze znajdą się dwa zbiory rozłączne.
12. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej istnieje taka jej wielokrotność, że w jej zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry 0 i 1.
13. Niech n_1, n_2, n_3 będą różnymi liczbami dodatnimi całkowitymi. Wykazać, że co najmniej jedna z liczb $n_1, n_2, n_3, n_1+n_2, n_2+n_3, n_1+n_2+n_3$ jest podzielna przez 3.
14. W ciągu 0, 0, 1, 2, 3, 6, 12, 23, 44, 85, ... każdy wyraz (począwszy od piątego) jest sumą czterech poprzednich. Wykazać, że pewne dwie kolejne liczby w tym ciągu są podzielne przez 14.

15. W kole o promieniu 10 wybrano 372 punkty. Wykaż, że istnieje pierścień o promieniach 2 i 3, który zawiera co najmniej 12 z tych punktów..

16. Spośród liczb 1, 2, ..., 2008 wybrano 1005 sztuk. Dowieść, że wśród nich są dwie, z których jedna dzieli się przez drugą.

17. Dowieść, że z każdego (k^2+1)-wyrazowego ciągu różnych liczb rzeczywistych można wybrać $(k+1)$-wyrazowy ciąg monotoniczny.

18. Pięciokąt wypukły ma wierzchołki w punktach kratowych. Wykazać, że zawiera on w swoim wnętrzu co najmniej jeden punkt kratowy.

Problemy

1. Udowodnić twierdzenie Ramseya:
   Niech $n \in \mathbb{N}$, S: dowolny zbiór.
   Definiujemy $S^{(n)} := \{\{s_1, \ldots, s_n\} : \text{każde } s_i \in S\}$.
   Niech X : zbiór nieskończony. Wtedy dla każdego P: podziału X^n na dwie części istnieje taki nieskończony podzbiór $Y \subseteq X$, że dla każdy element Y^n jest w tej samej części podziału P.

Lemat Burnside'a

1. Dwa pola szachownicy 7×7 pomalowano na żółto, pozostałe na zielono. Dwa kolorowania są równoważne, gdy jedno można uzyskać z drugiego poprzez obroty w płaszczyźnie szachownicy. Ile nierównoważnych pokolorowań ma szachownica? Jak wygląda odpowiedź w przypadku $(2n+1) \times (2n+1)$?

2. Jak wiele podzbiorów $\{x, y, z, t\} \subseteq \mathbb{N}$ spełnia $12 \leqslant x < y < z < t$ i $x + y + z + t = 2011$?

3. Znajdź liczbę różnych pokolorowań kostki sześcioma różnymi kolorami, gdy:
   - każdy kolor jest użyty dokładnie raz,
   - kolory mogą się powtarzać?

4. Oblicz rząd grupy symetrii dwunastościanu foremnego.

5. Dane są kart 3 pola na 3. W każdym z pól możemy zrobić dziurkę. Karty są na tyle symetryczne, że możemy je obracać wokół środka i odwracać na drugą stronę, nie wiedząc, w jakiej pozycji były one na początku. Używając lematu Burnside'a pokaż, że istnieje 8 rozróżnialnych kart 3×3 z dwoma dziurkami. Narysuj je.

6. (Teoria grup) Niech grupa G działa na zbiorze X i $|G| = 2^k$, a $|X|$-nieparzyste. Pokaż, że w X istnieje taki element, który jest punktem stałym wszystkich przekształceń z G.