II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2016

Zasada Dirichleta: grupa A

Kamil Szubiński

Zadania

1. Wykazać, że wśród dowolnych 4 liczb całkowitych znajdziemy zawsze dwie które daję tę samą resztę z dzielenia przez 3.
2. Wykaż, że z danych $n+1$ liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica jest podzielna przez n.
3. Danych jest 7 liczb całkowitych. Wykaż, że wśród nich zawsze będą takie dwie, których różnica kwadratów jest podzielna przez 10.
4. Stefan chce rozdać 50 cukierków 11 koleżankom tak, aby każda dostała inną liczbę cukierków. Czy może to zrobić?
5. W klasie jest 40 uczniów. Czy jest wśród nich czwórka uczniów urodzonych w tym samym miesiącu?
6. W zbiorze 100 wybranych studentów uczelni wszystkie nazwiska zaczynają się od liter C, A, L, M. Wyjaśnij dlaczego na uczelni studiuje co najmniej 25 studentów, których nazwiska zaczynają się na tę samą literę.
7. Udowodnij, że wśród dowolnie wybranych 7 krawędzi sześcianu istnieją co najmniej 3 wzajemnie równoległe.
8. Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów kratowych. Udowodnij, że można wybrać dwa z nich takie, że środek odcinka je łączącego też jest punktem kratowym.
9. Na nieskończonej szachownicy jest 1999 skoczków szachowych. Udowodnij, że można wybrać 1000 z nich takich, że żadne dwa się nie biją.
10. W kwadracie o boku 4 leży 17 punktów. Uzasadnij, że znajdziemy takie dwa, że ich odległość jest mniejsza lub równa $\sqrt{2}$.
11. W trójkącie równobocznym o boku długości 12 umieszczono 300 punktów. Pokaż, że pewne 3 z nich tworzą trójkąt o obwodzie nie większym niż 3.
12. Spośród liczb $1, 2, \ldots, 9$ wybrano sześć. Uzasadnij, że spośród wybranych liczb są dwie, których suma jest równa 10.
13. Wykaż, że w dowolnej grupie osób zawsze są dwie, które mają tę samą liczbę znajomych (zakładamy, że jeśli jedna osoba zna drugą, to jest też odwrotnie).

14. Udowodnij, że w dowolnym wielościanie

    - pewne dwa wierzchołki,
    - pewne dwie ściany

    mają tyle samo krawędzi.

15. Danych jest 6 niewspółliniowych punktów na płaszczyźnie. Wszystkie łączymy odcinkami koloru czerwonego lub niebieskiego. Udowodnij, że zawsze znajdzie się trójkąt jednego koloru.

16. Uzasadnij, że wśród liczb 1, 11, 111, ... jest liczba podzielna przez 2009.

17. Wykaż, że wśród liczb: 7, 72 , 73 , ... istnieje taka, której zapis dziesiętny kończy się na 001.

18. Udowodnij, że dla dowolnych $2^{n-1} + 1$ podzbiorów zbioru n-elementowego zawsze znajdą się dwa zbiory rozłączne.

19. Spośród liczb 1, 2, ... , $2n$ wybrano $n + 1$ sztuk. Dowieść, że wśród wybranych są trzy takie, że jedna z nich jest sumą dwóch pozostałych.

20. Niech $n, k, r, s \in \mathbb{N}$ i $0 \leqslant r, s \leqslant n$. Mamy $nk + r$ kulek rozmieszczonych w n szufladkach. Pokaż, że w pewnych s szufladkach znajduje się w sumie co najmniej sk+min$\{r, s\}$ kulek.

Problemy

1. Udowodnić małe twierdzenie Fermata korzystając z zasady szufladkowej: Dla $a, p \in \mathbb{Z}$ zachodzi
$$a^p \equiv a \pmod p$$

2. Niech $D(x)$ oznacza odległość liczby $x \in \mathbb{R}$ od najbliższej liczby całkowitej. Dowieść, że istnieje taka liczba naturalna $N \leqslant 1000^4$, że dla $p = 2, 3, 5, 7$ zachodzi nierówność $D(N\sqrt{p}) < \frac{1}{1000}$.