Niezmienniki i półniezmienniki

Katarzyna Miernikiewicz

Bardo Śląskie, 13-17 listopada 2017

1. Czy kostkami domina o wymiarach 1x2 można pokryć szachownicę 8x8 bez dwóch przeciwległych narożników?
2. Na szachownicy o wymiarach 17x17 na każdym polu leży moneta. Przesuwamy każdą z monet na pole graniczące (bokiem) z tym, na którym leżała do tej pory. Czy to możliwe, że znów na każdym polu leży moneta?
3. Czy konik szachowy może przejść przez wszystkie pola szachownicy 8x8, stając na każdym dokładnie raz, jeśli zaczyna w lewym dolnym rogu i kończy w prawym górnym?
4. Czy klockami o wymiarach 1x4 można pokryć szachownicę 6x6?
5. Czy klockami typu L (klocek przykrywa 4 pola) można pokryć szachownicę 10x10?
6. Czy klockami 1x7 i 1x9 można pokryć szachownicę 11x11?
7. Czy klockami 1x7 i 1x9 można pokryć szachownicę 12x12?
8. Ruch w grze prowadzonej na szachownicy 8x8, początkowo pokolorowanej w standardowy sposób, polega na wybraniu prostokąta o bokach różnej parzystości i zamianie koloru pól w jego wnętrzu na przeciwny. Czy może się tak zdarzyć, że na pewnym etapie gry wszystkie pola poza jednym będą białe?
9. Hydra ma 2017 głów. Dzielny rycerz jednym cięciem miecza może uciąć jej 17, 23, 56 lub 1 głowę. Po cięciu odrasta jej odpowiednio 11, 29, 0 lub 349 głów. Czy dzielny rycerz może pokonać hydrę?
10. Na pewnej wyspie żyją wiśniowozłociste, amarantoworóżane i błękitno-narodowo-zjednoczone kameleony, w liczbie odpowiednio 23, 3, 2017. Kiedy 2 kameleony różnych kolorów się spotkają, zmieniają kolor na trzeci. Czy może dojść do sytuacji, w której kameleonów każdego koloru będzie tyle samo?
11. Wokół okrągłego stołu siedzi 98 dzieci. Na początku wszystkie 98 ciastek leży przed jednym z dzieci. W jednym ruchu jedno z dzieci, które ma przynajmniej 2 ciastka, przekazuje po jednym ciastku

dziecku z lewej i dziecku z prawej. Czy może się tak zdarzyć, że po pewnej liczbie ruchów każde z dzieci będzie miało przed sobą dokładnie jedno ciastko?

12. W różnych miejscach na sali stoi n dziewczynek i n chłopców (żadne 3 osoby nie stoją w linii). Czy można tak dobrać dzieci w pary (bez gender! ;)), żeby każda para trzymała za końce skakankę, i żeby skakanki się nie krzyżowały?
13. W pewnym przedszkolu jest n dzieci. Należy je podzielić na dwie grupy, pamiętając jednak, że część dzieci nie chce być w grupie z tymi, których nie lubi… no, dobrze, z jednym takim w grupie wytrzyma. Czy można tak podzielić dzieci, wiedząc, że każde dziecko nie lubi co najwyżej 3 innych oraz że relacja nielubienia jest symetryczna (tj. jeśli Ala nie lubi Basi, to Basia Ali też)?
14. Rodzice są bardziej pamiętliwi od dzieci, to i więcej osób nie lubią. Zebranie 2n rodziców wygląda tak, że wszyscy siadają w kółku i rozmawiają. Żaden rodzic nie chce jednak siedzieć obok kogoś, kogo nie lubi. Czy można usadzić rodziców tak, żeby każdy był zadowolony, wiedząc, że żaden rodzic nie ma więcej niż n-1 wrogów?
15. Początkowo na polach (0,0), (1,0) i (0,1) żyją sobie bakterie. Bakterie rozmnażają się w taki sposób, że jeśli bakteria żyje na polu (a,b) oraz pola (a+1,b) i (a,b+1) są niezamieszkałe, to bakteria dzieli się i przenosi na pola (a+1,b) i (a,b+1), a pole (a,b) pozostaje puste. Czy po pewnej skończonej liczbie kroków może dojść do sytuacji, że pola (0,0), (1,0) i (0,1) będą niezamieszkałe?
16. (Żołnierze Conway'a) Na nieskończonej, pokratkowanej płaszczyźnie pewna prosta nieprzecinająca kratek wyznacza granicę. Na prawo od tej granicy na każdej kratce stoi żołnierz. Żołnierze poruszają się w taki sposób, że jeśli na polach (x,y) i (x+1,y) stoją żołnierze, to w następnym kroku mamy jednego żołnierza na polu (x+2,y). Czy żołnierze mogą zdobyć miasto odległe o 4 kratki od granicy? (Kratka, której bok należy do granicy, jest odległa o 0 kratek od granicy.)