Geometria rzutowa okręgu

Istnieje przekształcenie rzutowe które dany okrąg γ przeprowadza na siebie, a dany punkt wewnątrz okręgu γ na środek okręgu γ.

1. Uzasadnij, że nie da się przy użyciu samej linijki skonstruować środka danego okręgu.
2. Udowodnij, że istnieje przekształcenie rzutowe przeprowadzające dany okrąg na okrąg, a daną jego cięciwę na średnicę.
3. Udowodnij, że jeśli przekształcenie rzutowe przeprowadza okrąg γ na siebie, a jego środek O na inny punkt M, to obrazem prostej w nieskończoności jest prosta prostopadła do OM
4. Udowodnij, że dla danego okręgu i nieprzecinającej go prostej istnieje przekształcenie rzutowe zachowujące okrąg i przekształcające prostą na prostą w nieskończoności.

W poniższych zadaniach warto zacząc od wykonania przekształcenia rzutowego upraszczającego sytuację.

5. Udowodnij, że proste łączące przeciwległe punkty styczności czworokąta opisanego na okręgu przechodzą przez punkt przecięcia przekątnych.
6. Udowodnij, że proste łączące wierzchołki trójkąta z punktami styczności przeciwległych boków z okręgiem wpisanym przecinają się w jednym punkcie. (To oczywiście banalnie wynika też z tw. Cevy.)
7. Przez punkt P leżący wewnątrz okręgu γ poprowadzono wszystkie możliwe cięciwy. Wyznacz miejsce geometryczne punktów przecięcia stycznych do γ poprowadzonych przez dwa końce cięciwy.
8. Przez punkt P leżący wewnątrz okręgu γ poprowadzono wszystkie możliwe pary cięciw AB, CD. Wyznacz miejsce geometryczne punktów $AC \cdot BD$.
9. Niech γ będzie okręgiem dopisanym do trójkąta ABC (za bokiem BC). Niech $D = BC \cdot \gamma$, $E = AB \cdot \gamma$, $F = AC \cdot \gamma$, $T = BF \cdot CE$. Udowodnij, że A, D i T leżą na jednej prostej.
10. (Pascal) Udowodnij, że jeśli sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, to $AB \cdot DE$, $BC \cdot EF$ i $CD \cdot FA$ leżą na jednej prostej.
11. (Brianchon) Udowodnij, że jeśli sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu, to jego przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.
12. (Motylek) Niech O będzie środkiem cięciwy AB okręgu γ, MN i PQ – dowolnymi cięciwami przechodzącymi przez O, przy czym P i N leżą po tej samej stronie AB. Niech $E = AB \cdot MP$, $F = AB \cdot NQ$. Pokaż, że O jest środkiem odcinka EF.
13. Punkty A, B, C, D leżą na okręgu, a proste SA i SD są do niego styczne. Wykaż, że S, $AB \cdot CD$ i $AC \cdot BD$ są współliniowe.