Wzór Eulera

1. Udowodnij, że suma kątów wszystkich ścian wypukłego wielościanu jest dwa razy większa od sumy kątów wypukłego wielokąta o tej samej liczbie wierzchołków.
2. Nazwijmy *defektem* wierzchołka wielościanu różnicę między liczbą 2π a sumą kątów płaskich schodzących się w tym wierzchołku. Udowodnij, że sumą defektów wszystkich wierzchołków wielościanu wypukłego jest równa 4π.
3. Udowodnij, że jeśli powierzchnię wielościanu wypukłego można rozciąć na prostokąty, to ma on nie więcej niż 8 wierzchołków. Udowodnij, że jeśli powierzchnię wielościanu wypukłego można rozciąć na trójkąty równoboczne, to ma on nie więcej niż 12 wierzchołków.
4. Niech W_k oznacza liczbę wierzchołków, w których schodzi się k krawędzi. Niech S_k oznacza liczbę ścian o k bokach. Uzasadnij, że

$$2K = 3W_3 + 4W_4 + 5W_5 + \dots \qquad 2K = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \dots$$

5. Udowodnij, że każdy wypukły wielościan ma ścianę trójkątną lub kąt trójścienny. (Tak naprawdę łącznie jednego i drugiego ma co najmniej 8 sztuk.)
6. Udowodnij, że każdy wypukły wielościan: (a) ma ścianę o mniej niż sześciu bokach; (b) ma wierzchołek z którego wychodzi mniej niż sześć krawędzi.
7. Udowodnij, że w każdym wypukłym wielościanie zachodzą nierówności: $3W \le 2K$, $3S \le 2K$, $3S \ge 6 + K$, $3W \ge 6 + K$, $2S \ge 4 + W$, $2W \ge 4 + S$.
8. W pewnym wypukłym wielościanie wszystkie kąty są trójścienne, a każda ściana jest pięcio-, sześcio- lub siedmiokątem. Udowodnij, że liczba ścian pięciokątnych jest o 12 większa od liczby ścian siedmiokątnych.
9. Na każdej z krawędzi wielościanu wypukłego napisano znak $+$ albo $-$. Udowodnij, że istnieje wierzchołek, przy obchodzeniu którego znak zmienia się mniej niż 4 razy. (Policz na dwa sposoby liczbę kątów płaskich, które mają na ramionach różne znaki.)

Proste grafy płaskie.

Prosty graf płaski to (skończony) graf bez pętli i bez krawędzi wielokrotnych, narysowany na płaszczyźnie (lub sferze) bez samoprzecięć.

10. Zauważ, że dla prostych grafów płaskich prawdziwe są odpowiedniki zadań 6,7 i 9.
11. Uzasadnij, że w grafie płaskim: (a) średni stopień wierzchołka wynosi $2K/W$; (b) średnia liczba krawędzi ściany wynosi $2K/S$.
12. Wykaż, że grafy K_5 i $K_{3,3}$ nie są planarne – nie dają się narysować jako grafy płaskie. (Nie wprost. Policz liczbę ścian, a potem średnią liczbę krawędzi ściany.)
13. Na płaszczyźnie zaznaczono skończenie wiele punktów, kilka białych i kilka czarnych, tak że nie leżą wszystkie na jednej prostej. Udowodnij, że da się poprowadzić prostą monochromatyczną: prostą, na której leżą co najmniej dwa punkty jednego koloru i żaden drugiego koloru.
(Wsk. 'Sferyzacja'+zadanie 9 dla grafów.)