II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2016

Stereometria

Grzegorz Ciesielski

1. W pewnym czworościanie każdy wierzchołek połączono odcinkiem ze środkiem okręgu opisanego na przeciwległej ścianie. Okazało się, że otrzymane odcinki są wysokościami czworościanu. Wykaż, że czworościan ten jest foremny.

2. Udowodnij, że w dowolnym czworościanie suma miar dwóch kątów płaskich przy dowolnym wierzchołku jest większa od miary trzeciego kąta przy tym wierzchołku.

3. (OM) Dowieść, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ mamy $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$, to wszystkie ściany czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.

Definicja Prosta l jest styczna do sfery s, gdy ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny.

4. Prosta l jest styczna do sfery s o środku S w punkcie P. Udowodnij, że $SP \perp l$.

5. Prosta l jest styczna do sfery s w punkcie P. Udowodnij, że dla każdego okręgu o leżącego na sferze s przechodzącego przez punkt P, prosta l jest do niego styczna.

6. (**Najmocniejsze twierdzenie stereometrii**) Udowodnij, że wszystkie odcinki będące styczne do sfery o końcach w pukcie P i punktach styczności są równej długości.

7. Płaszczyzna ABC jest styczna do sfery s w punkcie C, a płaszczyzna ABD jest styczna do sfery s w punkcie D. Udowodnij, że $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$.

8. Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do boków ABC i BCD odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że $\angle APB = \angle BQD$.

9. (OM) Sfera wpisana w ostrosłup $ABCDS$ o podstawie będącej czworokątem wypukłym $ABCD$ jest styczna do podstawy w punkcie P. Udowodnij, że $\angle APB + \angle CPD = 180°$.

10. Dany jest czworościan $ABCD$ opisany na sferze s o środku S stycznej do ściany ABD w punkcie K, oraz sfera o o środku O dopisana do ściany ABC czworościanu, styczna do ściany ABD w punkcie L. Udowodnij, że:

    (a) punkty D, S, O są współliniowe.

    (b) punkty D, K, L są współliniowe.

    (c) płaszczyzny ABO i ABS są prostopadłe.

Definicja Proste k i l są prostopadłe w przestrzeni, jeśli istnieje płaszczyna π zawierająca prostą k prostopadła do prostej l. Ponadto, wszystkie proste leżące na płaszczyźnie π są prostopadłe do prostej l.

11. W czworościanie $ABCD$ krawędź AB jest prostopadła do krawędzi CD i $\angle ACB = \angle ADB$. Rozstrzygnij, czy oznacza to, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź AB i środek krawędzi CD jest prostopadła do krawędzi CD.

12. Wykazać, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają się, to również wysokości poprowadzone z wierzchołków C i D przecinają się.

13. (OM) Przekątne podstawy $ABCD$ ostrosłupa $ABCDS$ przecinają się pod kątem prostym w punkcie H, będącym spodkiem wysokości ostrosłupa. Niech K, L, M, N będą rzutami prostokątnymi punktu H odpowiednio na ściany ABS, BCS, CDS, DAS. Dowieść, że proste KL, MN i AC są równoległe lub przecinają się w jednym punkcie.

14. (OM) Dany jest czworościan $ABCD$. Punkt S jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $ABCD$, zaś Q jest środkiem sfery dopisanej do niego, stycznej do ściany ABC oraz do płaszczyzn pozostałych ścian. Punkty K i L są rzutami prostokątnymi punktu Q na proste AB i BC. Dowieść, że proste (skośne) KL i BS są prostopadłe.

15. (OM) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H. Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

16. (OM) Dany jest czworościan $ABCD$. Płaszczyzna przechodząca przez punkty styczności sfery s wpisanej w ten czworościan ze ścianami ABD, BCD i ACD przecina krawędzie AD, BD i CD odpowiednio w punktach A', B' i C'. Udowodnić, że środek sfery wpisanej w czworościan $A'B'C'D$ leży na sferze s.

17. (OM) Pięciokąt wypukły $ABCDE$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDES$. Płaszczyzna przecina krawędzie SA, SB, SC, SD, SE odpowiednio w punktach A', B', C', D', E' (różnych od wierzchołków ostrosłupa). Udowodnić, że punkty przecięcia przekątnych czworokątów $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $DEE'D'$, $EAA'E'$ leżą na jednej płaszczyźnie.

18. Dany jest wielościan wypukły o następujących własnościach: w każdym wierzchołku spotykają się 3 krawędzie, każda ściana jest wielokątem wpisanym w okrąg. Udowodnić, że:

    (a) każde dwie sąsiednie ściany są wpisane we wspólną sferę.

    (b) każde trzy sąsiednie ściany są wpisane we wspólną sferę.

    (c) ten wielościan można wpisać w sferę.