**II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej**
13-17 listopada 2017 r.
Bardo Śląskie

---

## Sumy

Oblicz

a) $\frac{1}{\sqrt{0}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + ... + n(n+1)(n+2)$

c) $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$

d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$

---

## Funkcje tworzące i rekurencje

1. Oznaczmy przez $f_n$ n-ty wyraz ciągu Fibonacciego i zdefiniujmy $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. Pokaż, że $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$. Wywnioskuj zwartą postać na $f_n$.
2. Znajdź wzór ogólny ciągów:
   (a) $a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$ dla $n \geq 3$, $a_2 = 12$, $a_1 = 5$, $a_0 = 5$,
   (b) $b_n = b_{n-1} + 3^n$ dla $n \geq 1$, $b_0 = 3$,
   (c) $c_n = c_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n \geq 1$, $c_0 = 1$.
3. Niech $F(x)$ i $G(x)$ będą funkcjami tworzącymi odpowiednio ciągów $f_n$ i $g_n$. Jakie są funkcje tworzące ciągów: $\alpha f_n + \beta g_n$, $c^n g_n$, $(n+1)g_n$, $ng_n$, $\frac{1}{n} g_n$, $\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$, $\sum_{k=0}^{n} g_k$?
4. Znajdź wzór na ciąg $c_n = \sum_{k=0}^{n} (2+k) 2^{n-k}$.
5. Znajdź wzór ogólny ciągu $d_n = n d_{n-1} + 1$ dla $n \geq 1$, $d_0 = 1$.
6. Oznaczmy przez $D_n$ liczbę nieporządków (permutacji bez punktów stałych) na zbiorze $\{1, 2, ..., n\}$. Znajdź wzór jawny na $D_n$.
7. Pokaż, że następujące liczby (oznaczane $C_n$ i nazywane liczbami Catalana) są równe:
   (a) Liczba połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta, tak by odpowiadające mu przekątne (lub boki) się nie przecinały,
   (b) Liczba podziałów $(n+2)$-kąta wypukłego przekątnymi na trójkąty,
   (c) Liczba spacerów po siatce kwadratowej z punktu $(0,0)$ do $(n,n)$ pozostających pod przekątną i takich, że w każdym kroku można zwiększyć dowolną współrzędną o jeden,
   (d) Liczba ustawień nawiasów (kolejności działań) w produkcie $n+1$ liter.
8. Znajdź wzór rekurencyjny, a następnie zwartą postać na $C_n$.

---

Przydadzą się rozwinięcia podstawowych funkcji w szeregi potęgowe. Mamy:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \log(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^k}{k}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad \text{gdzie } \binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Ponadto rowzwiązaniem równania $f'(x) = xf'(x) + xf(x)$ jest funkcja $f(x) = e^{-x} \frac{C}{1-x}$, dla pewnej stałej C.