

II Uniwersytecki

Obóz Olimpiady Matematycznej

Kombinatoryka

Bardo 13-17.11.2017

1. Rzucamy trzy razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?
2. Ile jest liczb dwucyfrowych, w których cyfra jedności jest równa 1 lub 3, zaś cyfra dziesiątek jest większa od 5?
3. Ile jest liczb dwucyfrowych? A stycyfrowych?
4. Ile jest liczb dwucyfrowych parzystych?
5. Ile jest par typu (litera, liczba)?
6. Ile jest możliwych numerów rejestracyjnych typu DJ26278, tzn. 2 litery i 5 cyfr?
7. Z Wrocławia do Barda prowadzą 4 ścieżki przez góry i lasy i jedna koleją. Na ile sposobów można przebyć trasę Wrocław - Bardo - Wrocław tak, aby wraca inaczej niż się przyjechało?
8. Na ile różnych sposobów nauczyciel może wystawić oceny 30 – osobowej klasie, tak żeby wszyscy zdali?(w 6 stopniowej skali ocen)
9. Marysia uwielbia kolorować. Znalazła zeszyt starszego brata w którym narysował on kwadrat, trójkąt i elipsę. Ma również do dyspozycji 8 kolorów farb. Na ile różnych sposobów Marysia może pomalować wszystkie trzy figury tymi ośmioma kolorami, tak aby każda figura była w innym kolorze?
10. Magda ma 17 sukienek, 20 par butów i zaledwie 10 torebek. Ile różnych zestawów (sukienka, buty, torebka) może założyć?
11. Szyfr do tajnego sejfu składa się z czterech różnych cyfr od 1 do 9 włącznie. Ile jest wszystkich możliwości, jeżeli pierwsza cyfra jest większa od 6?
12. Szyfr do bardzo tajnego sejfu składa się ze 100 różnych cyfr od 1 do 9 włącznie. Ile jest wszystkich możliwości, jeżeli pierwsza cyfra jest większa od 6, a każda znajdująca się na pozycji parzystej jest nieparzysta?

13. Grupa przedszkolaków organizuje przedstawienie, w którym wystąpią jako skrzaty, mające czapki w trzech kolorach. Liczbę osób mających czapkę w danym kolorze przedstawia tabela poniżej.

	Czerwona czapka	Niebieska czapka	Zielona czapka
Dziewczynki	7	4	2
Chłopcy	3	6	3

ile jest możliwości wyboru pary dziewczynka, chłopiec, w której:

- dwie osoby mają czapkę w tym samym kolorze
- co najmniej jedna osoba ma zieloną czapkę?

14. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

15. Ile osób musiałyby się urodzić w Polsce w ciągu jednego dnia, żeby zabrakło numerów PESEL?

16. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których 3 nie występuje po 4?

17. Ile jest liczb o ustalonej ilości cyfr n , w których cyfry się nie powtarzają?

18. Ile liczb mniejszych od 1000 jest podzielnych przez 3 i/lub/albo 4?

19. Na ile sposobów można wybrać trzy liczby spośród liczb od 1 do 10 tak aby ich suma wynosiła 11?

20. Z pudełka, w którym znajduje się 9 ponumerowanych kul od 1 do 9 włącznie, losujemy kolejno bez zwracania 3 kule. Zapisując wyniki losowań tworzymy liczby trzycyfrowe. Udowodnij że w ten sposób można utworzyć 378 liczb mniejszych od 780?

21. Oblicz:

- $4! - 2! \cdot 3!$
- $\frac{9! \cdot 7!}{(6!)^3}$
- $\frac{(9!)^3}{10! \cdot (8!)^2}$

22. Ile słów można ułożyć ze słowa MATEMATYKA?

23. Ile różnych słów można ułożyć z liter wchodzących w skład Twojego imienia?

24. Ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, w których cyfry 1 i 9 nie sąsiadują ze sobą
25. Nowo otwarty wydział zakładu karnego ma 10 cel jednoosobowych. Na ile sposobów możemy umieścić w celach tego wydziału 10-ciu więźniów?
26. Na arkę Noego weszło 5 panter, 5 lwów, 20 owiec, 10 świń i 10 krów. Na ile sposobów mogą z niej zejść jeśli najpierw zjedzą wszystkie krowy, potem lwy, za nimi owce, a na końcu pantery?
27. Mamy 5 książek, w tym „Hrabiego Monte Christo” i „Harrego Pottera”. Ustawiamy je losowo na pustej półce, jedna obok drugiej. Na ile sposobów można je tak ustawić, aby:
 - a) wyszczególnione książki nie stały obok siebie
 - b) pomiędzy tymi książkami stały dwie inne?

Kombinacje i inne zadania trochę trudniejsze

1. Ile jest podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego?
2. Spotyka się 10 osób. Ile nastąpi powitań?
3. Wybieramy 5 osobową delegację z 30 osobowej klasy. Na ile sposobów możemy to zrobić?
4. Udowodnij następującą własność symbolu Newtona: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$
5. Na turnieju szachowym każdy rozegrał z każdym dwie partie. Ilu było zawodników jeśli rozegrano w sumie 42 partie?
6. Z grupy 3 kobiet i 4 mężczyzn wybieramy 3 osoby. Ile jest takich sposobów wyboru żeby wśród wybranych osób:
 - a) były same kobiety
 - b) byli sami mężczyźni
 - c) były dwie kobiety i jeden mężczyzna?
7. W skrzyni jest 7 białych kul, 2 czarne i 1 zielona. Ile jest możliwych sposobów wyboru dwóch kul z tej skrzyni, tak aby:
 - a) kule były różnych kolorów
 - b) obie kule były białe
 - c) kule były tego samego koloru
 - d) przynajmniej jedna z kul była białą?
8. W losowaniu Dużego Lotka losujemy 6 kul z 49 kul ponumerowanych od 1 do 49. Ile jest wszystkich wyników losowania w Dużym Lotku.

9. W pudełku jest 2008 cukierków czekoladowych i 2010 cukierków "krówek". Na ile sposobów możemy zjeść k ($k > 0$) losowo wybranych cukierków?
10. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których zapisie cyfry tworzą ciąg: rosnący?
A niemalejący?
11. Rozważmy równanie $x + y + z = 10$. Jego rozwiązaniami są uporządkowane trójki liczb. Ile jest takich rozwiązań, które składają się z trzech liczb naturalnych? A naturalnych dodatnich?
12. Na ile sposobów można tak wybrać k pól szachownicy $n \times n$ ($k < n$), aby żadne dwa z wybranych pól nie leżały ani w jednym wierszu, ani w jednej kolumnie?
(XXII OM etap II)

Prawdopodobieństwo

1. Aby zakwalifikować się do kadry, zawodnik musi przejść z pozytywnym wynikiem co najmniej 4 spośród 7 testów. Jeśli będzie przygotowywał się do wszystkich testów, to prawdopodobieństwo sukcesu w każdym z tych testów będzie równe $1/2$. Jeśli będzie się przygotowywał do 5 testów, to prawdopodobieństwo sukcesu w każdym z nich będzie równe $3/4$. Jeśli zaś będzie się przygotowywał do 4 testów, to prawdopodobieństwo odniesienia sukcesu w każdym z tych czterech testów wyniesie $4/5$. Który z trzech wymienionych sposobów przygotowywania się jest najkorzystniejszy dla zawodnika?
2. ZSRR produkuje dobry czołg z prawdopodobieństwem $1/3$, natomiast USA z prawdopodobieństwem $2/3$. ZSRR wyprodukowało 10 czołgów, a USA tylko 5. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:
(a) ZSRR mają co najmniej 3 dobre czołgi?
(b) oba państwa mają po 3 dobre czołgi?
3. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia szóstki w Totolotku?