
II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2016

Liga zadaniowa

Dzień 3

1. Pokaż, że $\text{NWD}(F_m, F_n) = F_{\text{NWD}(n,m)}$, gdzie F_n oznacza n -tą liczbą Fibonacciego ($F_1 = F_2 = 1$).
2. Dany jest kąt o wierzchołku O i okrąg w niego wpisany, styczny do ramion w A i B . Niech K - dowolny punkt wewnątrz krótszego z dwóch łuków AB tego okręgu. Na prostej OB obrano punkt L taki, że $OA \parallel KL$. Niech S - okrąg opisany na trójkącie KLB , natomiast punkt $M \neq K$ - punkt przecięcia się S z prostą AK . Wykaż, że prosta OM jest styczna do S .
3. Dane jest koło o promieniu 1 oraz prostokąt o wymiarach $\frac{1}{n} \times \pi$. Jaka jest najmniejsza liczba pasków potrzebnych do przykrycia koła?
4. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, takie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}_+$ zachodzi nierówność:

$$(n-1)^2 < f(n)f(f(n)) < n^2 + n$$