II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2017

Liga zadaniowa

Dzień 2

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt O jest środkiem okręgu opipsanego na tym trójkącie. Okrąg opisany na trójkącie AOB przecina proste CA i CB jeszcze w punktach odpowiednio P i Q. Udowodnij, że proste CO i PQ są do siebie prostopadłe.

2. Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, a $m \in \mathbb{Z}$, to
$$(1+\frac{a}{b})^m + (1+\frac{b}{a})^m \geq 2^{m+1}.$$

3. Niech S będzie n-elementowym zbiorem, oraz niech $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ będą jego niepustymi podzbiorami. Udowodnij, że nie istnieją takie różne liczby $i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_s$, że
$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup \ldots \cup M_{j_s}.$$

4. Wyznacz wszystkie takie pary $(a,\, p)$, gdzie $a \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$, że
$$3^p + 7^p = 2 \cdot 5^a.$$