II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2016

Liga zadaniowa

Dzień 1

1. Liczby dodatnie $x_l, x_2, \ldots, x_n$ spełniają warunek:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$
Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej t większej od 1 zachodzi nierówność:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^t \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{t+1}$$

2. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności. Zbiór $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ można podzielić na dwa zbiory takie, że iloczyn liczb z jednego zbioru jest równy iloczynowi liczb z drugiego.

3. Ciąg x_n określony jest następująco:
$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{2n-3}{2n} x_{n-1} \text{ dla } n \geq 2$$
Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi nierówność:
$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n < 1$$

4. Udowodnij, że istnieje tylko jeden trójkąt o następujących własnościach:
   (a) długości jego boków są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi,
   (b) ma dwa takie kąty, że miara jednego jest dwukrotnie większa od drugiego.