II Uniwersytecki Obóz Olimpiady Matematycznej

Bardo, 13-17 listopada 2017

Rozwiązania zadań

Bieg przez kartoflisko

1. **Treść zadania:** W ośmiościanie foremnym wybrano punkt M. Udowodnij, że suma odległości M od ścian tego ośmiościanu nie zależy od wyboru M.
Rozwiązanie: Zauważmy, że suma iloczynów odległości punktu M z polami odpowiednich ścian nie zależy od wyboru punktu M (i równa objętości ośmiościanu). Ponadto pola ścian są równe, zatem suma odległości punktu M od wszystkich ścian ośmiościanu musi być stała.

2. **Treść zadania:** W kwadracie o boku 1 danych jest 9 punktów. Udowodnij, że istnieje trójkąt o wierzchołkach w trzech z tych punktów, którego pole jest nie mniejsze niż $\frac{1}{8}$.
Rozwiązanie: Rozbijmy kwadrat na 4 mniejsze kwadraty. W jednym z nich sa co najmniej 3 punkty, tworzące poszukiwany trójkąt.

3. **Treść zadania:** Trzydzieści krawędzi dwunastościanu foremnego chcemy ponumerować liczbami od 1 do 30 używając każdej liczby dokładnie raz. Czy można to zrobić tak, by suma numerów krawędzi wychodzących z dowolnego wierzchołka była podzielna przez 4?
Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że istnieje takie ponumerowanie. Oznaczmy sumy numerów krawędzi wychodzących z wierzchołków przez $a_1, a_2, \ldots a_{12}$. Wówczas $4|a_1+a_2+\cdots+a_{12} = 2\cdot(1+2+\cdots+30) = 2\cdot\frac{30\cdot 31}{2} = 2\cdot 15\cdot 31$, co jest sprzecznością.

4. **Treść zadania:** Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a+b+c=0$. Udowodnij, że:
$$a^3+b^3+c^3 = 3abc.$$
Rozwiązanie: Wystarczy zauważyć, że
$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$$

5. **Treść zadania:** Niech $n \geq 2$ będzie liczbą naturalną. Czy liczba składająca się w zapisie dziesiętnym z 2^n-2 trójek i dwóch jedynek może być liczbą pierwszą?
Rozwiązanie: Niech m będzie liczbą jak w zadaniu. Wówczas:
$$m = 3\cdot 11\ldots 11 - 2\cdot 10^l - 2\cdot 10^k = \frac{10^{2^n}-1}{3} - 2\cdot 10^l - 2\cdot 10^k.$$
Zatem
$$m = \frac{10^{2^n}-1-6\cdot 10^l(10^{k-l}+1)}{3}.$$
Wystarczy zatem pokazać, że $NWD\left(10^{2^n}-1, 10^{k-l}+1\right) > 1$. Jak łatwo zauważyć, powyższa liczba nie jesst podzielna przez 3. Z treści zadania wiemy, że $n \geq 2$ oraz $1 \leq k-l \leq 2^n-1$. Rozważmy trzy przypadki:
   (a) Jeśeli liczba $k-l$ jest nieparzysta, to obie liczby są podzielne przez 11.
   (b) Jeżeli liczba $k-l$ jest postaci 2^t, $t \leq n-1$, to wykorzystujemy tożsamość:
   $$x^{2^n}-1 = \left(x^{2^{n-1}}+1\right)\left(x^{2^{n-2}}+1\right)\ldots(x+1)(x-1).$$
   Podstawiając $x=10$ otrzymujemy tezę.

(c) Jeżeli $k-l=2^ts$, gdzie s jest liczbą nieparzystą, to $10^{2^t}+1$ dzieli $10^{k-l}+1$.

6. **Treść zadania:** Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt O jest środkiem okręgu opipsanego na tym trójkącie. Okrąg opisany na trójkącie AOB przecina proste CA i CB jeszcze w punktach odpowiednio P i Q. Udowodnij, że proste CO i PQ są do siebie prostopadłe.
Rozwiązanie: Niech $\angle PQC=\alpha$. Wówczas $\angle PAB=180°-\alpha$ oraz $\angle BAC=\alpha$. Ponadto $\angle BOC=2\alpha$, więc $\angle OCB=90°-\alpha$. Niech CO przecina PQ w punkcie M. Wówczas w trójkącie MCQ otrzymujemy: $\angle MQC=\alpha$, $\angle MCQ=90°-\alpha$ i ostatecznie $\angle CMQ=90°$, stąd $CO\perp PQ$.

7. **Treść zadania:** Udowodnij, że dla $k,l\in\mathbb{N},k\neq l$ istnieje nieskończenie wiele takich $n\in\mathbb{N}$, że: $NWD(k+n,l+n)=1$.
Rozwiązanie: Załóżmy, że $k<l$. Rozważmy zbiór $\mathbb{S}=(\mathbb{P}-l)\cap\mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{P}$ jest zbiorem liczb pierwszych. zbiór $\mathbb{S}$ jest zbiorem nieskończonym, ponieważ $\mathbb{P}$ jest zbiorem nieskończonym (zawartym w $\mathbb{N}$). Ponadto, dla każdego $n\in\mathbb{S}$, $NWD(k+n,l+n)=NWD(k+n,l+p-l)=NWD(k+n,p)$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a $k+n<p$. Zatem $NWD(k+n,l+n)=1$ dla wszystkich $n\in\mathbb{S}$.

8. **Treść zadnania:** Niech punkty K i L będą środkami odpowiednio łuków AB i AC na ABC niezawierających punktów C i B. Wykaż, że prosta KL jest symetralną odcinka AI_{ABC}, gdzie I_{ABC} oznacza środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
Rozwiązanie: Z twierdzenia o trójliściu mamy, że $AK=AI_{ABC}$, czyli K leży na symetralnej AI_{ABC}. Analogicznie stwierdzamy, że L również na niej leży.

9. **Treść zadania:** Udowodnij, że dla $a,b\in\mathbb{N}$ takich, że $a\neq b$ i $NWD(a,b)=1$
$$NWD(a^n-b^n,a^m-b^m)=a^{NWD(n,m)}-b^{NWD(n,m)}$$
Rozwiązanie: Wystarczy pokazać, że jeśli $d|a^n-b^n$ i $d|a^m-b^m$, to $d|a^{n-m}-b^{n-m}$, ponieważ wówczas możemy zastosować algorytm Euklidesa na wykładnikach a i b.

10. **Treść zadania:** Dany jest trójkąt ABC. Niech prosta l przecina boki BC,AC i AB tego trójkąta odpowiednio w punktach D,E i F. Oznaczmy przez P punkt przecięcia okręgów opisanych na ABC i AEF. Oznaczmy przez Q przecięcie prostej AP z prostą BC. Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AEF oraz DPQ są styczne.
Rozwiązanie: Bez straty ogólności załóżmy, że punkty D, S, B, C leżą w tej kolejności na prostej BC. W przeciwnym razie rozumowanie przebiega analogicznie.
Zauważmy, że na mocy twierdzenia o kącie pomiędzy styczną a cięciwą teza zadania równoważna jest pokazaniu, że $\angle FTS=\angle TDS+\angle TAF$. Z racji tego, że T jest przecięciem $\bigcirc(ABC)$ i $\bigcirc(AEF)$, otrzymujemy, że T jest punktem Miquela czworoboku zupełnego $CBFEDA$. Widzimy więc, że czworokąt $DBFT$ jest cykliczny. Ponadto T jest środkiem podobieństwa spiralnego przekształcającego DB na EA, skąd mamy, że $\triangle TDB\sim\triangle TEA$. Dostajemy zatem, że $\angle TDS=\angle TEA=\angle TFA$, czyli $\angle FTS=\angle TDS+\angle TAF$.

11. **Treść zadania:** Niech $a,b,c\in\mathbb{R}_+$. Udowodnij, że
$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)\geq 4.$$
Rozwiązanie: Ponieważ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, to dana nierówność jest równoważna nierówności:
$$\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}+\frac{ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4}{2abc(ab+bc+ca)}\geq 3.$$
Z nierówności Caychy'ego-Schwarza otrzymujemy:
$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)(ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4)\geq(b^2+c^2+c^2+a^2+a^2+b^2)^2=4(a^2+b^2+c^2)^2$$
Skąd mamy:
$$\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right)(ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4)\geq 2(a^2+b^2+c^2)^2$$

Wykorzystując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a geometryczną oraz powyższą, otrzymujemy:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)\geq\left(\frac{(ab+bc+ca)(ab^4+ac^4+bc^4+ba^4+ca^4+cb^4)}{2abc(a^2+b^2+c^2)^2}\right)^{\frac{1}{3}}\geq 3.$$

12. **Treść zadania:** Niech X będzie zbiorem, a $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$ takimi skończonymi podzbiorami X, że $\frac{|A_i|}{|X|} > \frac{1}{2}$. Pokaż, że istnieje $x \in X$ taki, że x należy do co najmniej n podzbiorów spośród $A_1, A_2, \ldots A_{2n}$
Rozwiązanie: Zauważmy, że:

$$|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_{2n}| > \frac{1}{2} \cdot |X| \cdot 2n = |X| \cdot n.$$

Z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje szukany $x \in X$.

13. **Treść zadania:** Udowodnij, że dla $x, y, z \geq 2$ zachodzi nierówność

$$(y^3+x)(z^3+y)(x^3+z) \geq 125xyz.$$

Rozwiązanie zadania: Pokażemy, że

$$(x_1^{nr}+ax_2^{ns})(x_2^{nr}+ax_3^{ns})\ldots(x_n^{nr}+x_1^{ns}) \geq (k^{n(r-s)}+a)^n P^{ns}, \tag{1}$$

gdzie $P = x_1x_2\ldots x_n$, $r \geq s \geq 0$, $a \geq 0$ i $x_i \geq k \geq 0$.
Skoro $k^n \leq P$, to mamy $k^{n(r-s)} \leq P^{r-s}$ i stąd

$$(k^{n(r-s)}+a)P^s \leq p^r + aP^s \leq (x_1^{nr}+ax_2^{ns})^{\frac{1}{n}}(x_2^{nr}+ax_3^{ns})^{\frac{1}{n}}\ldots(x_n^{nr}+x_1^{ns})^{\frac{1}{n}}$$

, gdzie ostani krok wynika z nierówności Höldera. Teraz podnosimy obie strony do potęgi n i otrzymujemy (1).

14. **Treść zadania:** Udowodnij, że dla $a, b, n \in \mathbb{N}$ liczba $(a^2+b^2)^n$ jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych.
Rozwiązanie: Gdy $n = 0$ zadanie jest oczywiste. Dalej zauważmy, że gdy $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, to

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2.$$

A skoro iloczyn dwóch sum kwadratów liczb całkowitych jest sumą kwadratów liczb całkowitych, to iloczyn dowolnej (dodatniej) liczby sum kwadratów liczb całkowitych jest sumą kwadratów liczb całkowitych.

15. **Treść zadania:** Znajdź wszystkie $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\frac{2^n+1}{n^2} \in \mathbb{Z}.$$

Rozwiązanie: Zauważmy, że n musi być nieparzyste. Niech p będzie najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą n. Wtedy $2^n \equiv_p -1$. Weźmy x, y najmniejsze takie, że $2^x \equiv_p -1$ i $2^y \equiv_p 1$. Zauważmy, że $2^{p-1} \equiv_p 1$ z małego tqierdzenia Fermata, zatem $y \leq p-1$. Weźmy s i r takie, że $n = ys + r$, gdzie $0 \geq r < y$. Wówczas $-1 \equiv 2^n \equiv (2^y)^s \cdot 2^r \equiv 2^r \pmod{p}$, zatem $x \leq r < y$. Teraz weźmy h i k takie, że $n = hx + k$, $0 \leq k < x$. Wówczas $-1 \equiv 2^n \equiv (2^x)^h \cdot 2^k \equiv (-1)^n \cdot 2^k$. Dla $k > 0$ mamy 2 przypadki:

(a) 2 nie dzieli h. Wówczas $-1 \equiv_p -2^k$, skąd $2^k \equiv_p 1$, ale $k < x < y$, sprzeczność.

(b) 2 dzieli h. Wówczas $-1 \equiv_p 2^k$, ale $k < x$, sprzeczność.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $k = 0$, zatem $n = hx$. A skoro $x < y < p$ oraz p jest najmniejszą liczbą różną od 1 dzielącą n, to $x = 1$. Zatem $n = 3^a$.
Stosując LTE otrzymujemy: $v_3(2^n+1) = v_3(2+1) + v_3(n) = 1 + v_3(n)$, ale $v_3(n^2) = 2 \cdot v_3(n)$ i $n^2 \mid 2^n + 1$, więc $2v_3(n) \leq 1 + v_3(n)$, skąd $v_3(n) \leq 1$, więc $n = 1$ lub $n = 3$. Sprawdzamy, że te liczby są ok.

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1}
\end{array}$$

16. **Treść zadania:** Udowodnij, że suma dowolnych n liczb z poniższej tabelki takich, że żadne dwie nie leżą w tych samych wierszach ani kolumnach jest nie mniejsza niż 1.
Rozwiązanie: Oznaczmy liczby w tabelce przez a_{ij}, gdzie i jest numerem wiersza, a j numerem kolumny. Wówczas suma dowolnych n liczb z poniższej tabelki takich, że żadne dwie nie leżą w tych samych wierszach ani kolumnach jest równa $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sigma(k)-1}$, gdzie σ jest pewną permutacją zbioru $\{1, 2, \dots n\}$. Z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną otrzymujemy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sigma(k)-1} \geq \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n}(k+\sigma(k)-1)} = \frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n} = 1$$

17. **Treść zadania:** W okrąg o wpisujemy czworokąt $ABCD$. Niech P będzie przecięciem prostych AD i BC, Q przecięciem prostych AD i BC, a S przecięciem prostych AC i BD. Oznaczmy przez M środek odcinka PQ. Prosta SM przecina okrąg o w punkcie R. Udowodnić, że o i okrąg opisany na trójkącie PQR są styczne.
Rozwiązanie: Poprowadźmy prostą rownoległa do PQ przez S. Niech tnie ona o w punktach X, Y. Teza na mocy jednokładności równoważna jest temu, że X, R i Q oraz Y, R i P są współliniowe (z dokładnością do kolejności oznaczenia punktów X, Y). Pokażemy, że P, X, R są współliniowe (zakładamy w konfiguracji, że punkty P, X, R' leżą w takiej kolejności na jednej prostej). Niech prosta QS przecina prostą PR' w punkcie L. Ponieważ QS jest biegunową punktu P względem o, zatem $(P, L; X, R') = -1$. Ponadto wiadomym jest, że $S(P, Q; M, X) = -1$ (bo XY równoległe do PQ). Dlatego też $-1 = S(P, Q; M, X) = S(P, L; R, X) = S(P, L; X, R)$. Jednak skoro R' leży na o, więc $R \in PX$, zatem $R = R'$.

18. **Treść zadania:** Niech A będzie skończonym zbiorem. Niech działanie $* : A \times A \to A$ spełnia własności:
    (a) $a * b = b * a$ dla dowolnych $a, b \in A$
    (b) $a * (b * c) = (a * b) * c$ dla dowolnych $a, b, c \in A$.

    Udowodnij, że istnieje takie $a \in A$, że $a * a = a$.

    Rozwiązanie: Niech $a^n = \overbrace{a * a * \cdots * a}^{n}$. W zbiorze $\{a^1, a^2, \dots\}$ ze skończoności zbioru A istnieją elementy równe, zatem istnieją $k, n \in \mathbb{N}$, $n > k$ takie, że $a^k = a^n$. Niech $m = n - k$. Wówczas:

$$a^k = a^k \cdot a^m = a^k \cdot a^m \cdot a^m = \cdots = a^k \cdot a^{lm}$$

dla dowolnego $l \in \mathbb{N}$. W szczególności:

$$a^{k(m+1)} = a^k \cdot a^{km} = a^k = a^k \cdot a^{k(2m+1)} = a^{2k(m+1)}.$$

Oznaczając $b = a^{k(m+1)}$ mamy $b * b = b$.