GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 8

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym i $m, n \in \mathbb{N}$. Poniżej słowo „działanie” rozumiemy jako „*lewe* działanie”.

1. Rozważmy naturalne działanie grupy $\mathrm{GL}_3(K)$ na K^3. Udowodnić, że to działanie indukuje tranzytywne działanie $\mathrm{GL}_3(K)$ na:
   (a) $\mathbb{P}^2$;
   (b) zbiorze podprzestrzeni liniowych wymiaru 2 w K^3;
   (c) zbiorze prostych w $\mathbb{P}^2$.

2. Dla $A \in \mathrm{GL}_3(K)$ i $F \in K[X,Y,Z]$ rozważmy
$$A \cdot F := F\left(A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\right) \in K[X,Y,Z].$$
   Udowodnić, że:
   (a) powyższy wzór zadaje działanie $\mathrm{GL}_3(K)$ na $K[X,Y,Z]$;
   (b) działanie to dla każdego $d \in \mathbb{N}$ zachowuje zbiór wielomianów jednorodnych stopnia d.

3. Udowodnić, że działanie z zadania 2. zadaje działanie $\mathrm{GL}_3(K)$ na zbiorze podzbiorów algebraicznych $\mathbb{P}^2$ i że to działanie obcięte do zbioru prostych w $\mathbb{P}^2$ pokrywa się z działaniem z zadania 1(c).

4. Niech F, G będą wielomianami jednorodnymi w $K[X,Y,Z]$, $x \in \mathbb{P}^2$ i $A \in \mathrm{GL}_3(K)$. Udowodnić, że (używając poprzednich zadań, aby zinterpretować odpowiednie działania) mamy:
$$I(x, F \cap G) = I(A \cdot x, (A \cdot F) \cap (A \cdot G)).$$

5. Niech
$$0 \to A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to 0$$
   będzie ciągiem dokładnym skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad K. Udowodnić, że:
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim_K(A_i) = 0.$$

6. Dla $k \in \mathbb{N}$, niech R_k będzie przestrzenią K-liniową składającą się z wielomianów jednorodnych stopnia k w $K[X,Y,Z]$. Załóżmy, że $d \geqslant m + n$ i że mamy ciąg dokładny postaci
$$0 \to R_{d-m-n} \to R_{d-m} \times R_{d-n} \to R_d \to E \to 0,$$
   gdzie E jest pewną przestrzenią liniową nad K. Udowodnić, że:
$$\dim_K(E) = mn.$$

7. Dla $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$, niech $F^* \in K[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ będzie homogenizacją wielomianu F względem zmiennej X_{n+1}. Udowodnić, że dla dowolnych $F, G \in K[X_1, \ldots, X_n]$ mamy:
$$X_{n+1}^t (F+G)^* = X_{n+1}^r F^* + X_{n+1}^s G^*,$$
   gdzie:
$$r = \deg(G), \quad s = \deg(F), \quad t = r + s - \deg(F+G).$$