

GEOMETRIA ALGEBRAICZNA, Lista 3

Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym, V, W będą rozmaitościami afinicznymi i $n, m > 0$.

1. Niech R będzie pierścieniem UFD i $a, b \in R$ będą takie, że $\text{NWD}(a, b) = 1$. Udowodnić, że

$$R[X]/(aX + b) \cong_R R[b/a].$$

2. Niech $W \subset \mathbb{A}^n$ będzie zbiorem skończonym mocy m .

- (a) Opisać $I(W)$ jako przekrój ideałów maksymalnych pierścienia $K[X_1, \dots, X_n]$.
(b) Korzystając z Chińskiego Twierdzenia o Resztach, udowodnić że

$$K[W] \cong_K K^m.$$

- (c) Wywnioskować, że $\text{Fun}(W, K) = K[W]$.
(d) Porównać powyższy dowód punktu (c) z dowodem Zadania 1.15.

3. Udowodnić, że:

- (a) $V \times W$ jest afinicznym zbiorem algebraicznym;
(b) zbiór

$$\Delta_V := \{(v, v) \in V \times V \mid v \in V\} \text{ (przekątna)}$$

jest domknięty Zariskiego w $V \times V$;

- (c) jeśli $A \subseteq V$ jest gęsty Zariskiego, $F, G : V \rightarrow W$ są morfizmami i $F|_A = G|_A$, to $F = G$.

4. Morfizm $\Psi : V \rightarrow W$ nazywamy *monomorfizmem*, jeśli dla dowolnego afinicznego zbioru algebraicznego Z i dowolnych morfizmów $\Phi_1, \Phi_2 : Z \rightarrow V$, jeśli $\Phi_1 \neq \Phi_2$, to $\Psi \circ \Phi_1 \neq \Psi \circ \Phi_2$. Morfizm Ψ nazywamy *epimorfizmem*, jeśli dla dowolnego afinicznego zbioru algebraicznego Z i dowolnych morfizmów $\Phi_1, \Phi_2 : W \rightarrow Z$, jeśli $\Phi_1 \neq \Phi_2$, to $\Phi_1 \circ \Psi \neq \Phi_2 \circ \Psi$. (Pojęcia te mają sens w dowolnej kategorii.)

Opisać monomorfizmy i epimorfizmy w kategorii afinicznych zbiorów algebraicznych.

5. Niech $V = V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2$ oraz

$$\Psi : \mathbb{A}^1 \rightarrow V, \quad \Psi(x) = (x^2, x^3).$$

Udowodnić, że Ψ jest bijektywnym morfizmem, który nie jest izomorfizmem.

6. Podać przykład epimorfizmu w kategorii pierścieni, który nie jest surjekcją.
7. Niech I będzie ideałem w pierścieniu R . Udowodnić, że pierścień R/I jest zredukowany (tzn. nie ma elementów nilpotentnych) wtedy i tylko wtedy, gdy ideał I jest radykalny.
8. Zadania 3., 4., 5. z <https://www.math.uni.wroc.pl/~kkrup/lista13.pdf> oraz zadanie 1. z <https://www.math.uni.wroc.pl/~kkrup/lista14.pdf> (głównie dla studentów ISIM).