

## ALGEBRA 1, Lista 9

Konwersatorium 13.12.2024, Ćwiczenia 13.12.2024.

- 0S. Materiał teoretyczny: Pierścień (przemienny, z jedyneką), dzielnik zera, element odwracalny, grupa elementów odwracalnych pierścienia, dziedziła, ciało. Przykłady pierścieni. Każda skończona dziedziła jest ciałem. Wylczenie, które pierścienie  $\mathbb{Z}_n$  są ciałami. Homomorfizm i izomorfizm pierścieni, definicja, przykłady. Produkt pierścieni. Izomorfizm pierścieni  $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ , gdy  $m$  i  $n$  są względnie pierwsze.
- 1S. Wskazać dzielniki zera i elementy odwracalne w pierścieniu  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ .
- 2S. Określić działania  $\oplus$  i  $\odot$  w zbiorze  $\mathbb{Z}$  tak, by  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$  był pierścieniem i funkcja

$$f : (\mathbb{Z}, \oplus, \odot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot), \quad f(x) = x + 1$$

była izomorfizmem. Wskazać jedynekę i zero pierścienia  $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ .

- 3K. Sprawdzić, czy poniższe  $(A, \oplus, \odot)$  są pierścieniami:
- (a)  $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ,  $a \oplus b = a + b$ ,  $a \odot b = ab$  (dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych);
  - (b)  $A = \mathbb{R}$ ,  $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ ,  $a \odot b = a \cdot b$ ;
  - (c)  $A = \mathbb{R}_{>0}$ ,  $a \oplus b = a \cdot b$ ,  $a \odot b = a^b$ .
- 4K. Znaleźć wszystkie homomorfizmy  $f : R \rightarrow S$  pierścieni z jedyneką  $R$  i  $S$  (uwaga: zgodnie z definicją,  $f(1_R) = 1_S$ ), dla:
- (a)  $R = \mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{Z}_6$ ;
  - (b)  $R = \mathbb{Z}_{15}$ ,  $S = \mathbb{Z}_3$ ;
  - (c)  $R = \mathbb{Z}_7$ ,  $S = \mathbb{Z}_4$ ;
  - (d)  $R = \mathbb{Z}$ ,  $S = \mathbb{Z}$ ;
  - (e)  $R = \mathbb{Q}$ ,  $S = \mathbb{Q}$ ;
  - (f)  $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = S$ ;
  - (g)  $R = \mathbb{R} = S$ .
5. Znaleźć wszystkie dzielniki zera i wszystkie elementy odwracalne w następujących pierścieniach:
- (a)  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ;
  - (b)  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{10}$ ;
  - (c)  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ .
6. Niech  $+$ ,  $\cdot$  będą działaniami określonymi w zbiorze  $A$ . Wiadomo, że  $(A, +)$  jest grupą, zaś działanie  $\cdot$  jest łączne, rozdzielne względem  $+$  i ma element neutralny  $1 \in A$ . Wykazać, że wtedy  $(A, +, \cdot)$  jest pierścieniem.  
Wskazówka: wystarczy udowodnić przemienność  $+$ . W tym celu wymnożyć na dwa sposoby  $(1 + 1)(a + b)$  i porównać wyniki.
7. Załóżmy, że  $(R, +, \cdot)$  jest pierścieniem, w którym grupa addytywna  $(R, +)$  jest cykliczna. Udowodnić, że  $R$  jest przemienny.
8. Załóżmy, że w pierścieniu  $R$  mamy  $a^2 = a$  dla wszystkich  $a \in R$ .
- (a) Udowodnić, że  $a + a = 0$  dla wszystkich  $a \in R$  (wskazówka: rozważyć  $(a + a)^2$ ).
  - (b) Udowodnić, że  $R$  jest przemienny (wskazówka: rozważyć  $(a + b)^2$ ).
9. Niech  $C(\mathbb{R})$  oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  z działaniami
- $$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
- (a) Czy funkcja  $f(x) = x$  jest odwracalna w pierścieniu  $C(\mathbb{R})$ ? Czy jest dzielnikiem zera?
  - (b) Podać przykład funkcji odwracalnej w  $C(\mathbb{R})$ , różnej od funkcji stale równej jeden (jedynki pierścienia  $C(\mathbb{R})$ ).
  - (c) Które funkcje w  $C(\mathbb{R})$  są odwracalne?
  - (d) Podać przykład funkcji w  $C(\mathbb{R})$ , która jest dzielnikiem zera w  $C(\mathbb{R})$ .
  - (e) Które funkcje w  $C(\mathbb{R})$  są dzielnikami zera?