

## ALGEBRA 1, Lista 7

Konwersatorium 29.11.2024, Ćwiczenia 29.11.2024.

- 0S. Skończone grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych: rozpoznawanie ich izomorficzności. Grupa kwaternionów  $Q_8$  i klasyfikacja grup rzędu co najwyżej 8. Centrum grupy.
- 1S. Grupa przekształceń afinicznych prostej to poniższy zbiór funkcji  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$A = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$

- (a) Udowodnić, że  $A$  jest grupą względem złożenia funkcji (podgrupą  $S_{\mathbb{R}}$ ).  
(b) Niech

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$

Udowodnić, że  $H$  jest podgrupą  $GL_2(\mathbb{R})$ .

- (c) Udowodnić, że  $A \cong H$ .

- 2S. Znaleźć nietrywialne podgrupy  $A, B < \mathbb{Z}_{15}$  takie, że funkcja

$$f : A \times B \rightarrow \mathbb{Z}_{15}, \quad f(a, b) = a +_{15} b$$

jest izomorfizmem.

- 3K. Wypisać wszystkie grupy abelowe rzędu 12 (z dokładnością do izomorfizmu, bez powtórzeń).

- 4K. Czy istnieje monomorfizm grup  $f : G \rightarrow H$ ? Jeśli tak, wskazać przykład i wyznaczyć obraz (wskazówka: taki monomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa  $S \leq H$  taka, że  $S \cong G$ ).

- (a)  $G = \mathbb{Z}_6$ ,  $H = \mathbb{Z}_{24}$ ,  
(b)  $G = \mathbb{Z}_{10}$ ,  $H = \mathbb{Z}$ ,  
(c)  $G = \mathbb{Z}_6$ ,  $H = \mathbb{Z}_{100}$ ,  
(d)  $G = \mathbb{Z}_{15}$ ,  $H = S_8$ ,  
(e)  $G = (\mathbb{R}, +)$ ,  $H = (\mathbb{Q}, +)$ ,  
(f)  $G = S_3$ ,  $H = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$ ,  
(g)  $G = D_4$ ,  $H = S_8$ .

5. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:

- (a)  $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$  i  $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$ ;  
(b)  $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$  i  $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$ ;  
(c)  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$  i  $\mathbb{Z}_{315}$ .

6. Czy istnieją podgrupy właściwe  $K, H$  grupy kwaternionów  $Q_8$  takie, że  $Q_8$  jest produktem wewnętrznym  $K$  i  $H$ ?

7. Wyznaczyć wszystkie elementy postaci  $x^2$  w:

- (a) grupie kwaternionów  $Q_8$ ,  
(b) grupie  $S_3$ ,  
(c) grupie  $S_4$ .

Czy tworzą one podgrupę? Czy jest to podgrupa normalna?

8. Udowodnić, że każda podgrupa grupy kwaternionów  $Q_8$  jest jej dzielnikiem normalnym.

9. Udowodnić, że

$$Q_8/Z(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$