

1. Dla każdego z niedeterministycznych automatów skończonych z zadania 1.6 skonstruować równoważny deterministyczny automat skończony.

2. Udowodnić następujące tożsamości dla wyrażeń regularnych r, s, t :

- (a) $r + s = s + r$, (b) $(rs)t = r(st)$, (c) $(r + s)t = rt + st$,
 (d) $(r^*)^* = r^*$, (e) $(r^*s^*)^* = (r + s)^*$, (f) $(r + s) + t = r + (s + t)$,
 (g) $r(s + t) = rs + rt$, (h) $\emptyset^* = \varepsilon$, (i) $(\varepsilon + r)^* = r^*$

3. Udowodnić lub obalić następujące tożsamości (a) $(rs + r)^*r = r(sr + r)^*$, (b) $s(rs + s)^*r = rr^*s(rr^*s)^*$, (c) $(r + s)^* = r^* + s^*$.

4. Uprościć poniższe wyrażenia regularne r . Dla danego wyrażenia rego r znaleźć wyrażenie regularne s takie, że $L(s) = \{0, 1\}^* \setminus L(r)$.

- (a) $(0^* + 1^*0)^*$, (b) $(0 + 1^*0^*)^*$, (c) $((1 + 0^*1)(0 + 1^*0))^*$

5. Niech $L = \{w \in \{0, 1\}^* : \text{na 10 miejscu od końca w słowie } w \text{ jest zero}\}$. Udowodnić, że każdy DAS akceptujący L musi mieć przynajmniej 1024 stany (wsk: może najpierw rozpatrzyć prostsze warianty ?).

6. Używając lematu o pompowaniu udowodnić, że następujące języki nie są regularne:

- (a) $L = \{0^n1^n : n \in \mathbb{N}\}$,
 (b) $L = \{0^n10^n : n \in \mathbb{N}\}$,
 (c) $L = \text{zbiór palindromów nad alfabetem } \{0, 1\}$.

7*. Niech $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ będą dwoma DAS-ami. Definiujemy DAS $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, \langle q_1, q_2 \rangle, F_1 \times F_2)$, gdzie

$$\delta(\langle p_1, p_2 \rangle, a) = \langle \delta_1(p_1, a), \delta_2(p_2, a) \rangle.$$

Udowodnić, że $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$.

8*. (a) Załóżmy, że R jest relacją binarną na zbiorze X oraz $a_0, \dots, a_{n-1} \in X$. Definiujemy relację $\sim_R$ na X wzorem:

$$x \sim_R y \iff (\forall i < n)(xRa_i \iff yRa_i).$$

Udowodnić, że $\sim_R$ jest relacją równoważności. Co można powiedzieć o liczbie klas abstrakcji tej relacji ?

(b) Załóżmy, że $L \subseteq \Sigma^*$. Definiujemy relację $\sim_L$ na zbiorze Σ^* wzorem:

$$w \sim_L v \iff (\forall t \in \Sigma^*)(wt \in L \iff vt \in L).$$

Udowodnić, że $\sim_L$ jest prawostronnie niezmienniczą relacją równoważności na zbiorze Σ^* . Podać przykład, gdzie relacja ta ma nieskończenie wiele klas abstrakcji.

9*. Udowodnić następujący wariant lematu o pompowaniu. Załóżmy, że L jest językiem regularnym. Wtedy istnieje stała $n \in \mathbb{N}$ taka, że dla każdego słowa $z \in L$ długości $\geq n$, jeśli w słowie tym zaznaczymy n liter, to z można przedstawić w postaci $z = uvw$ (dla pewnych słów u, v, w) tak, że:

- (a) w słowie v jest przynajmniej jedna zaznaczona litera i
 (b) dla każdego $i \geq 0$ słowo $uv^i w$ należy do L .