

## 6. Liczby wymierne i niewymierne. Niewymierność pierwiastków i logarytmów (c.d.).

20 grudnia 2008 r.

88. Obliczyć podając wynik w postaci ułamka zwykłego

a)  $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)}$

b)  $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2)$

c)  $(0,(037))^{0,(3)}$

Odpowiedź:

a)  $\sqrt{0,(4)} + \sqrt[3]{3,374(9)} = \sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$

b)  $(0,2(9) + 1,(09)) \cdot 12,(2) = \left(\frac{3}{10} + \frac{12}{11}\right) \cdot \frac{110}{9} = (3 \cdot 11 + 12 \cdot 10) \cdot \frac{1}{9} = \frac{153}{9} = 17$

c)  $(0,(037))^{0,(3)} = \left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}$

89. Dowieść, że podane liczby są niewymierne

a)  $\sqrt{2}$

b)  $\sqrt[n]{n}$ , jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną niebędącą  $m$ -tą potęgą liczby naturalnej

c)  $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

d)  $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$

e)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$

f)  $\log_m n$ , jeżeli liczby naturalne  $m, n > 1$  nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

Rozwiązanie:

a)  $\sqrt{2}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\sqrt{2}$  jest wymierna i niech  $m/n$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu **względnie pierwszych** liczb naturalnych (zauważmy, że jest to liczba dodatnia). Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$2n^2 = m^2.$$

Stąd wynika, że liczba  $m^2$  jest parzysta, a co za tym idzie, liczba  $m$  jest parzysta. Podstawiając  $m = 2k$  otrzymujemy

$$2n^2 = (2k)^2$$

$$n^2 = 2k^2,$$

co z kolei prowadzi do wniosku, że liczba  $n$  jest parzysta.

Zatem obie liczby  $m$ ,  $n$  są parzyste, co stoi w sprzeczności z założeniem, że liczby te są względnie pierwsze. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że liczba  $\sqrt{2}$  nie jest liczbą wymierną.

Zwróćmy uwagę, że w tym dowodzie nie wykorzystywaliśmy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, a jedynie skorzystaliśmy z faktu, że liczba naturalna i jej kwadrat mają tę samą parzystość.

**b)**  $\sqrt[m]{n}$ , jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną niebędącą  $m$ -tą potęgą liczby naturalnej

Założmy, że liczba  $\sqrt[m]{n}$  jest wymierna i niech  $a/b$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu liczb naturalnych. Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{n} &= \frac{a}{b} \\ n &= \frac{a^m}{b^m} \\ n \cdot b^m &= a^m.\end{aligned}$$

Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Niech  $i$ ,  $j$ ,  $k$  będą odpowiednio wykładnikami (być może równymi 0), z jakimi  $p$  wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczb  $n$ ,  $b$ ,  $a$ . Wówczas, na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$i + mj = mk,$$

skąd wynika, że liczba  $i$  jest podzielna przez  $m$ .

To oznacza, że w rozkładzie liczby  $n$  na czynniki pierwsze każdy czynnik pierwszy występuje w wykładniku podzielny przez  $m$ , a w konsekwencji liczba  $n$  jest  $m$ -tą potęgą liczby naturalnej.

Udowodniliśmy więc, że liczba  $\sqrt[m]{n}$  jest wymierna tylko wtedy, gdy jest całkowita. Innymi słowy, jest to liczba niewymierna, wyjąwszy przypadki, gdy pierwiastkowanie daje się wykonać w zbiorze liczb naturalnych jak np.  $\sqrt[3]{27} = 3$ ,  $\sqrt[6]{64} = 2$ ,  $\sqrt[4]{4096} = 8$ .

**c)**  $\sqrt{5} + \sqrt{7}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Założmy, że podana liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ .

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\sqrt{5} + \sqrt{7} &= w \\ 5 + 2\sqrt{35} + 7 &= w^2 \\ \sqrt{35} &= \frac{w^2 - 12}{2},\end{aligned}$$

co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie po prawej stronie równości reprezentuje liczbę wymierną, podczas gdy po lewej stronie znajduje się liczba niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dana w zadaniu liczba jest niewymierna.

d)  $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że podana liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ .

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} = w$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{7} = w - \sqrt{3}$$

$$5 + 2\sqrt{35} + 7 = w^2 - 2w\sqrt{3} + 3$$

$$2\sqrt{35} + 2w\sqrt{3} = w^2 - 9$$

$$140 + 8w\sqrt{105} + 12w^2 = (w^2 - 9)^2$$

$$\sqrt{105} = \frac{(w^2 - 9)^2 - 140 - 12w^2}{8w},$$

co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie po prawej stronie równości reprezentuje liczbę wymierną, podczas gdy po lewej stronie znajduje się liczba niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dana w zadaniu liczba jest niewymierna.

e)  $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że podana liczba jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ .

Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = w$$

$$2 + 3 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9} + 3 = w^3$$

$$2 + 3w \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} + 3 = w^3$$

$$3w \cdot \sqrt[3]{6} = w^3 - 5$$

$$\sqrt[3]{6} = \frac{w^3 - 5}{3w},$$

co jest niemożliwe, gdyż wyrażenie po prawej stronie równości reprezentuje liczbę wymierną, podczas gdy po lewej stronie znajduje się liczba niewymierna.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dana w zadaniu liczba jest niewymierna.

f)  $\log_m n$ , jeżeli liczby naturalne  $m, n > 1$  nie są potęgami tej samej liczby naturalnej

Założmy, że liczba  $\log_m n$  jest wymierna i niech  $a/b$  będzie jej przedstawieniem w postaci ilorazu **względnie pierwszych** liczb naturalnych. Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\log_m n = \frac{a}{b}$$

$$m^{a/b} = n$$

$$m^a = n^b.$$

Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Niech  $i, j$  będą odpowiednio wykładnikami (być może równymi 0), z jakimi  $p$  wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczb  $m, n$ . Wówczas, na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozkładu liczb naturalnych na czynniki pierwsze, otrzymujemy

$$ai = bj,$$

skąd wobec założenia, że liczby  $a, b$  są względnie pierwsze, wynika, że liczba  $i$  jest podzielna przez  $b$ .

To oznacza, że w rozkładzie liczby  $m$  na czynniki pierwsze każdy czynnik pierwszy występuje w wykładniku podzielny przez  $b$ , a w konsekwencji liczba  $m$  jest  $b$ -tą potęgą liczby naturalnej, którą oznaczmy przez  $k$ . Zatem

$$m = k^b$$

oraz

$$n^b = m^a = k^{ab},$$

skąd

$$n = k^a.$$

Udowodniliśmy więc, że jeżeli liczba  $\log_m n$  jest wymierna, to liczby  $m, n$  są potęgami tej samej liczby naturalnej.

Można to wysłowić w sposób może mało precyzyjny, ale za to przemawiający do wyobraźni:

Jeżeli logarytmowanie  $\log_m n$  nie daje się łatwo wykonać, jak np.  $\log_4 8 = 3/2$ ,  $\log_{32} 128 = 7/5$ ,  $\log_{243} 27 = 3/5$ , to liczba  $\log_m n$  jest niewymierna.

**90.** Rozstrzygnąć, czy liczba  $\log_2 3 + \log_4 5$  jest wymierna czy niewymierna.

*Rozwiązanie:*

Z równości

$$\log_2 3 + \log_4 5 = \log_4 9 + \log_4 5 = \log_4 45$$

wynika, że podana liczba jest niewymierna.

**OSZUSTWO 91.**

**ZADANIE:** Dowieść, że liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$  jest niewymierna.

**ROZWIĄZANIE I:**

Liczba  $-\sqrt{2}$  jest niewymierna. Także liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}}$  jest niewymierna, bo gdyby była wymierna, to jej kwadrat  $3 - \sqrt{8}$  też byłby liczbą wymierną, a nie jest. Zatem liczba  $\sqrt{3 - \sqrt{8}} - \sqrt{2}$  jest niewymierna jako suma liczb niewymiernych.

## ROZWIĄZANIE II:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$  jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ . Wtedy

$$w = \sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$$

$$w + \sqrt{2} = \sqrt{3-\sqrt{8}}$$

$$w^2 + 2\sqrt{2}w + 2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}(w+1) + (w-1)(w+1) = 0$$

Dzieląc ostatnią równość przez  $w+1$  otrzymujemy

$$2\sqrt{2} + w - 1 = 0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby  $w$ , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

Czy powyższe rozwiązania są poprawne?

*Rozwiązanie:*

ROZWIĄZANIE I jest błędne, gdyż powołuje się na twierdzenie: *suma liczb niewymiernych jest niewymierna*, które nie jest ogólnie prawdziwe, np. z równości

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

wynika, że suma dwóch liczb niewymiernych może być wymierna.

W ROZWIĄZANIU II wykonujemy dzielenie przez  $w+1$ , co jest dozwolone pod warunkiem, że  $w+1$  jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:

Liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2}$  jest niewymierna lub równa  $-1$ .

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{2} = -1.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{2}-1$$

$$3-\sqrt{8} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$3-\sqrt{8} = 2-2\sqrt{2}+1$$

$$3-\sqrt{8} = 3-\sqrt{8},$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa  $-1$ , czyli jest liczbą wymierną.

## OSZUSTWO 92.

ZADANIE: Dowieść, że liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$  jest niewymierna.

ROZWIĄZANIE:

Przeprowadzimy dowód nie wprost. Załóżmy, że liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$  jest wymierna i oznaczmy ją przez  $w$ . Wtedy

$$\begin{aligned}w &= \sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2} \\w-\sqrt{2} &= \sqrt{3-\sqrt{8}} \\w^2-2\sqrt{2}w+2 &= 3-2\sqrt{2} \\2\sqrt{2}(-w+1)+(w-1)(w+1) &= 0\end{aligned}$$

Dzieląc ostatnią równość przez  $w-1$  otrzymujemy

$$-2\sqrt{2}+w+1=0,$$

co stanowi sprzeczność z założeniem wymierności liczby  $w$ , gdyż lewa strona równości jest liczbą niewymierną i nie może być równa 0.

W powyższym rozwiązaniu wykonujemy dzielenie przez  $w-1$ , co jest dozwolone pod warunkiem, że  $w-1$  jest różne od zera. Tak więc poprawnie jest udowodniony następujący fakt:

Liczba  $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}$  jest niewymierna lub równa 1.

Pozostaje sprawdzić, czy w istocie zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1.$$

Przekształcając otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}\sqrt{3-\sqrt{8}} &= -\sqrt{2}+1 \\3-\sqrt{8} &= (-\sqrt{2}+1)^2 \\3-\sqrt{8} &= 2-2\sqrt{2}+1 \\3-\sqrt{8} &= 3-\sqrt{8},\end{aligned}$$

a więc w istocie dana w zadaniu liczba jest równa 1, czyli jest liczbą wymierną.

Jak to jednak możliwe, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{2}=1,$$

skoro po lewej stronie występuje liczba większa od  $\sqrt{2}$ , a więc tym bardziej większa od 1?

*Rozwiązanie:*

Podana liczba jest jednak niewymierna. Błąd polegał na podniesieniu stronami do kwadratu równości

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} = -\sqrt{2}+1,$$

w której lewa strona jest dodatnia, a prawa ujemna.

Zauważmy, że

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1,$$

skąd

$$\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{2} = \sqrt{2}-1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}-1.$$

**93.** Liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie i niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba  $a+b$  jest niewymierna?

*Odpowiedź:* **Nie**, np.

$$\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2}) = 2.$$

**94.** Czy liczba  $\log_{(\sqrt{2}-1)}(\sqrt{2}+1)$  jest wymierna czy niewymierna?

*Odpowiedź:* Wobec równości

$$(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1) = 1$$

dana w zadaniu liczba jest równa  $-1$ , jest więc wymierna.

**95.** Dowieść, że suma liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

*Odpowiedź:* Gdyby suma liczby wymiernej  $w$  oraz liczby niewymiernej  $n$  była równa liczbie wymiernej  $w_2$ , otrzymalibyśmy

$$n = w_2 - w,$$

a przecież liczba po prawej stronie jest wymierna.

**96.** Czy iloczyn liczby wymiernej i liczby niewymiernej jest zawsze liczbą niewymierną?

*Odpowiedź:* Nie, np. iloczyn zera i liczby niewymiernej jest równy zero, jest więc wymierny. Jednak za wyjątkiem takiego przypadku możemy rozumować podobnie jak w zadaniu poprzednim.

Otrzymamy wówczas następujące twierdzenie:

Iloczyn **różnej od zera** liczby wymiernej oraz liczby niewymiernej jest liczbą niewymierną.

**97.** Liczby  $a+b$ ,  $b+c$  i  $c+a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są wymierne?

Odpowiedź: **Tak**, mamy bowiem

$$a = \frac{(a+b) - (b+c) + (c+a)}{2}$$

i podobnie dla liczb  $b, c$ .

**98.** Liczby  $a+b, b+c$  i  $c+a$  są niewymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczba  $a+b+c$  jest niewymierna?

Odpowiedź: **Nie**, np. dla liczb

$$a = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{2}$$

$$c = -2\sqrt{2}$$

mamy

$$a+b = 2\sqrt{2}$$

$$b+c = -\sqrt{2}$$

$$c+a = -\sqrt{2}$$

oraz

$$a+b+c = 0.$$

**99.** Liczby  $a+b, b+c, c+d$  i  $d+a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a, b, c, d$  są wymierne?

Odpowiedź: **Nie**, np. dla liczb

$$a = c = \sqrt{2}$$

$$b = d = -\sqrt{2}$$

mamy

$$a+b = b+c = c+d = d+a = 0.$$

**100.** Liczby  $a+b, b+c, c+d$  i  $d+e, e+a$  są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby  $a, b, c, d, e$  są wymierne?

Odpowiedź: **Tak**, mamy bowiem

$$a = \frac{(a+b) - (b+c) + (c+d) - (d+e) + (e+a)}{2}$$

i podobnie dla liczb  $b, c, d, e$ .



**101.** Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Mając do dyspozycji nawiasy,  $n$ , liczby całkowite oraz znaki  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$ ,  $:$  i  $\sqrt{\quad}$  zapisać liczbę niewymierną dodatnią mniejszą od  $\frac{1}{n}$ .

*Odpowiedź:* Najbardziej narzucający się przykład to

$$\frac{1}{n\sqrt{2}}.$$

**102.** Suma wyrazów rosnącego postępu arytmetycznego 2007-wyrazowego o wyrazach dodatnich jest liczbą wymierną. Czy stąd wynika, że co najmniej jeden wyraz postępu jest liczbą wymierną?

*Odpowiedź:* **Tak.** Ze wzoru (przy standardowych oznaczeniach)

$$S_{2007} = 2007 \cdot a_{1004}$$

otrzymujemy

$$a_{1004} = \frac{S_{2007}}{2007},$$

skąd wynika, że wyraz środkowy  $a_{1004}$  jest liczbą wymierną.

**103.** To samo pytanie dla postępu 2008-wyrazowego.

*Odpowiedź:* **Nie.** Np. postęp arytmetyczny określony wzorem

$$b_n = (2n - 2009) \cdot \sqrt{2} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots, 2008$$

ma wszystkie wyrazy niewymierne i sumę zero.

Postęp ten ma pierwszy wyraz równy  $-2007\sqrt{2}$ , ostatni  $2007\sqrt{2}$ . Różnica postępu jest równa  $2\sqrt{2}$ .

Postęp arytmetyczny określony wzorem  $a_n = b_n + 5000$  ma wszystkie wyrazy niewymierne dodatnie i sumę 10040000.

**104.** Wszystkie poniższe przykłady można podać bez używania operacji bardziej skomplikowanych niż logarytmy i pierwiastki, korzystając tylko z faktu niewymierności liczb o postaci rozważanej we wcześniejszych zadaniach.

Podać przykład takiej liczby rzeczywistej  $x$ , że

- a)  $0 < x < 1$  oraz liczba  $x$  jest niewymierna,
- b)  $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$  oraz liczba  $x$  jest wymierna,
- c) liczby  $x^2$  i  $x^3$  są niewymierne, ale liczba  $x^5$  jest wymierna,
- d) liczby  $x^4$  i  $x^6$  są wymierne, ale liczba  $x^5$  jest niewymierna,
- e) liczba  $(x+1)^2$  jest niewymierna,
- f) liczba  $x$  jest niewymierna, ale liczba  $x + \frac{1}{x}$  jest wymierna,
- g) liczba  $x$  jest niewymierna i liczba  $2^x$  jest niewymierna,

- h)  $2^x + 3^x$  jest liczbą niewymierną,  
 i)  $2^x + 3^x$  jest liczbą wymierną,  
 j)  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,  
 k)  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą wymierną,  
 l)  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,  
 m)  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą wymierną,  
 n)  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą całkowitą dodatnią,  
 o)  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą niewymierną,  
 p)  $x + \log_2 x$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,  
 q)  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,  
 r)  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą niewymierną,  
 s)  $\log_x(1+x)$  jest liczbą wymierną,  
 t)  $\log_x(1+x)$  jest liczbą niewymierną.

Odpowiedź:

- a)  $0 < x < 1$  oraz liczba  $x$  jest niewymierna,  
 $x = 1/\sqrt{2}$   
 b)  $\sqrt{5} < x < \sqrt{6}$  oraz liczba  $x$  jest wymierna,  
 $x = 2,4$   
 c) liczby  $x^2$  i  $x^3$  są niewymierne, ale liczba  $x^5$  jest wymierna,  
 $x = \sqrt[5]{2}$   
 d) liczby  $x^4$  i  $x^6$  są wymierne, ale liczba  $x^5$  jest niewymierna,  
 $x = \sqrt{2}$   
 e) liczba  $(x+1)^2$  jest niewymierna,  
 $x = \sqrt{2}$   
 f) liczba  $x$  jest niewymierna, ale liczba  $x + \frac{1}{x}$  jest wymierna,  
 Rozwiązując równanie

$$x + \frac{1}{x} = w$$

otrzymujemy

$$x^2 - wx + 1 = 4,$$

skąd

$$x = \frac{w \pm \sqrt{w^2 - 4}}{2}.$$

Przyjmując np.  $w = 4$  oraz  $\pm = +$  otrzymujemy  $x = \sqrt{3} + 2$ .

- g) liczba  $x$  jest niewymierna i liczba  $2^x$  jest niewymierna,

$$x = \log_2 \sqrt{3} = \frac{\log_2 3}{2} \text{ prowadzi do } 2^x = \sqrt{3}$$

- h)  $2^x + 3^x$  jest liczbą niewymierną,  
 $x = 1/2$
- i)  $2^x + 3^x$  jest liczbą wymierną,  
 $x = 1$
- j)  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,  
 $x = 3$
- k)  $\log_2 x + \log_3 x$  jest liczbą wymierną,  
 $x = 1$
- l)  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą niewymierną,  
 $x = 3$
- m)  $\log_2 x \cdot \log_3 x$  jest liczbą wymierną,  
 $x = 1$
- n)  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą całkowitą dodatnią,  
 $x = 1$
- o)  $2^x + \log_2 x$  jest liczbą niewymierną,  
 $x = 1/2$
- p)  $x + \log_2 x$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,  
 $x = 1/2$
- q)  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą wymierną niecałkowitą,  
 $x = \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}$ , wówczas  $x^{\sqrt{2}} = 1/4$
- r)  $x^{\sqrt{2}}$  jest liczbą niewymierną,  
 $x = 2^{\sqrt{2}/4}$ , wówczas  $x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
- s)  $\log_x(1+x)$  jest liczbą wymierną,  
Równanie

$$\log_x(1+x) = w$$

prowadzi do

$$x^w = x + 1.$$

Szansę na rozwiązanie tego równania mamy wtedy, gdy sprowadza się ono do równania kwadratowego.

Dla  $w = 2$  otrzymujemy

$$x^2 = x + 1,$$

co prowadzi do przykładu

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dla  $w = -1$  otrzymujemy

$$x^{-1} = x + 1$$

$$1 = x^2 + x,$$

co prowadzi do przykładu

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Dla  $w = 1/2$  otrzymujemy

$$x^{1/2} = x + 1.$$

Po podstawieniu  $y = \sqrt{x}$  dostajemy

$$y = y^2 + 1,$$

co nie ma rozwiązań rzeczywistych.

t)  $\log_x(1+x)$  jest liczbą niewymierną.

$$x = 2$$

<http://www.math.uni.wroc.pl/mdm/>