Publikacja Mariusza Mirka w Annals of Mathematics.

Piotr Borodulin-Nadzieja (Uniwersytet Wrocławski),
Przegląd Uniwersytecki 1(241), 2023

Mariusz Mirek z Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego opublikował w tym roku, wraz z Benem Krause i Terencem Tao, artykuł *Pointwise ergodic theorems for non-conventional bilinear polynomial averages* w czasopiśmie Annals of Mathematics. Znaczenie tego czasopisma dla społeczności matematyków wymyka się wszelkim wskaźnikom bibliometrycznym. Matematykowi nie przejdzie przez myśl, żeby wysłać tam swój artykuł, chyba, że dokonał jakiegoś wielkiego odkrycia, udowodnił twierdzenie, które zelektryzuje społeczność matematyków lub rozwiązał ważny problem, z którym bezskutecznie mierzyło się już wiele osób. Aby artykuł przeszedł redakcyjne sito, musi zawierać wybitne i przełomowe rezultaty, a i to nie zawsze wystarczy. W ciągu roku na łamach Annals of Mathematics pojawia się jedynie kilkadziesiąt, a w niektórych latach wręcz kilkanaście, prac. Dodajmy też, że matematycy afiliowani na polskich uczelniach są tam obecni raczej sporadycznie (np. w ciągu ostatniej dekady, pomijając opisywany przypadek, zdarzyło się to tylko dwa razy).

Badania matematyczne dotyczą struktur bardzo abstrakcyjnych i złożonych, dlatego wyjątkowo trudno opisać je laikom. Nie przedstawimy więc szczegółowo efektów badań Mariusza Mirka. Opiszemy jednak pokrótce motywację, która za nimi stała oraz nakreślimy sylwetkę jednego z jego współautorów. Bowiem napisanie artykuł wspólnie z Terence'em Tao to powód do dumy nie mniejszy niż opublikowanie artykułu w Annals of Mathematics.

Nasza opowieść będzie dotyczyć podzbiorów liczb naturalnych.

Zbiory złożone z liczb naturalnych bywają duże i małe. To, co dokładnie rozumiemy pod słowami „duże" i „małe", zależy od kontekstu. Możemy na przykład rzec, że zbiory małe to te, które są skończone, a zbiory duże, to te, które są nieskończone. Linię demarkacyjną między tym, co małe i co duże, możemy wytyczyć również na inne sposoby.

Można użyć pojęcia *gęstości asymptotycznej*. Powiemy, że zbiór ma gęstość $\frac{1}{2}$, jeżeli dla odpowiednio dużych liczb naturalnych n mniej więcej połowa liczb mniejszych od n należy do naszego zbioru. Podobnie, zbiór ma gęstość $\frac{2}{3}$, jeżeli dla odpowiednio dużych liczb n mniej więcej $\frac{2}{3}$ liczb mniejszych od n należy do naszego zbioru. Ogólna i formalna definicja gęstości zbioru A brzmi następująco:

$$d(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n},$$

jej zrozumienie nie jest jednak konieczne dla dalszej lektury.

Przykładem zbiorów o gęstości $\frac{1}{2}$ są: zbiór liczb parzystych, zbiór liczb nieparzystych, ale też zbiór liczb parzystych większych od 1000. Zbiór liczb podzielnych przez 5 będzie miał gęstość $\frac{1}{5}$, a zbiór liczb, które nie są podzielne przez 3, ma gęstość $\frac{2}{3}$. Istnieją także zbiory o gęstości będącej liczbą niewymierną (na przykład tak zwane liczby bezkwadratowe, które mają gęstość $\frac{6}{\pi^2}$) a nawet zbiory, które nie posiadają gęstości.

Zauważmy, że wszystkie zbiory skończone mają gęstość 0. Ale nie tylko one! Przykładem jest tu zbiór złożony z wszystkich potęg liczby 2, a więc z liczb

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...$$

W istocie, wśród pierwszych dziesięciu liczb naturalnych cztery są potęgą dwójki (a więc 40% z nich), wśród pierwszych stu już jedynie siedem (a więc 7%). Im dłuższe odcinki będziemy wybierać, tym mniejsza ich część będzie potęgami dwójki, a ściślej tym bliższy zeru będzie stosunek liczby potęg dwójki do liczby elementów odcinka. To oznacza dokładnie tyle, że zbiór potęg dwójki ma gęstość 0.

Podzbiory zbioru liczb naturalnych można więc podzielić na te o gęstości 0 i pozostałe, które roboczo będziemy nazywać zbiorami *gęstymi*. Przykład zbioru wszystkich potęg dwójki świadczy o tym, że podział ten nie jest tożsamy z podziałem na zbiory skończone i nieskończone.

Można też zaproponować inną linię podziału. Przypomnijmy, że postępem arytmetycznym nazywamy skończony ciąg liczb naturalnych, który powstaje przez dodawanie do kolejnych jego wyrazów pewnej stałej (którą będziemy nazywać *różnicą*). Przykładem jest tu ciąg $2, 5, 8, 11$ (jego różnicą jest 3) czy 101, 201, 301. Postępem arytmetycznym nie jest natomiast ciąg $2, 4, 7$. Powiemy, że zbiór jest *szeroki*, jeżeli zawiera dowolnie długie postępy arytmetyczne. Takim zbiorem jest zbiór liczb parzystych, bo zawiera on postępy o różnicy 2 dowolnej długości. Takim zbiorem nie jest z kolei zbiór potęg liczby 2, bo nie zawiera on żadnego postępu arytmetycznego długości większej niż 2.

Nasuwa się tu naturalne pytanie: jaka jest relacja pomiędzy zbiorami gęstymi i szerokimi? Czy te pojęcia są od siebie niezależne? Czy pokrywają się?

Pomedytujmy przez chwilę nad zbiorem złożonym z elementów

$$1, 2, 4, 6, 9, 12, 15, 19, 23, 27, 31, ...$$

Na jakiej zasadzie dobraliśmy wyrazy tego ciągu? Zaczynamy od dwuwyrazowego postępu arytmetycznego o różnicy 1 długości 2 $(1, 2)$, potem następuje trójwyrazowy postęp o różnicy 2 $(2, 4, 6)$, który przechodzi w 4-wyrazowy postęp o różnicy 3 $(6, 9, 12, 15)$. Ciąg ten powstaje przez zlepianie coraz dłuższych postępów arytmetycznych o coraz większych różnicach. Jest to więc przykład zbioru, który zawiera dowolnie długie postępy arytmetyczne, czyli zbioru szerokiego. Nie jest to jednak zbiór gęsty, bo odstępy między kolejnymi wyrazami powyższego ciągu są coraz większe.

Powyższy przykład świadczy o tym, że rodzina zbiorów gęstych i rodzina zbiorów szerokich nie pokrywają się: istnieje zbiór szeroki, lecz nie gęsty. Czy istnieje w takim razie zbiór gęsty, który nie jest szeroki? Okazuje się, że to pytanie jest daleko nietrywialne. Zostało zadane w latach 30' przez węgierskich matematyków, Paula Erdősa i Pála Turána, a odpowiedzi doczekało się dopiero w 1975 roku. Odpowiedział na nie, przecząco, Endre Szemerédi. Fakt, że każdy zbiór gęsty jest szeroki nosi więc nazwę twierdzenia Szemerédiego i jest jednym z najważniejszych twierdzeń kombinatoryki arytmetycznej. Niespełna dwa lata później Hillel Furstenberg podał inny dowód twierdzenia Szemerédiego za co został niedawno uhonorowany nagrodą Abela, zwaną czasami matematycznym Noblem. Podejście Furstenberga było wielkim przełomem we współczesnej teorii ergodycznej. Częściowo dlatego, że oryginalny dowód Szemerédiego był bardzo skomplikowany, a częściowo dlatego, że argumenty Furstenberga doczekały się wielu daleko idących uogólnień. Metody Furstenberga zostały użyte m. in. przez Bena Greena i Terence'a Tao, którzy udowodnili, że zbiór liczb pierwszych jest zbiorem szerokim rozwiązując problem, który trapił matematyków co najmniej od 1770 roku, kiedy to sformułował go Joseph Louis Lagrange.

Zatrzymajmy się na chwilę przy tym twierdzeniu i przy postaci Terence'a Tao. To ten sam Terence Tao, który jest współautorem artykułu z Mariuszem Mirkiem. Terence Tao jest żywą legendą w świecie matematyków. Jeśli fraza „żywa legenda" przywołuje w nas obraz wiekowego mędrca z siwą brodą, to w tym wypadku jest to skojarzenie zupełnie nie na miejscu, ponieważ Terence Tao nie skończył jeszcze pięćdziesięciu lat. Wybitne uzdolnienia przejawiał już jako dziecko (podobno sam nauczył się czytać w wieku dwóch lat), a jego kariera toczyła się wyjątkowo szybko: magistrem został w wieku siedemnastu lat, a profesorem w wieku lat dwudziestu czterech. W chwili, gdy potwierdzał wspomnianą wyżej kilkusetletnią hipotezę Lagrange'a, nie miał jeszcze trzydziestki. Oprócz problemu Lagrange'a rozwiązał szereg innych ważnych problemów i został laureatem Medalu Fieldsa, najbardziej prestiżowej nagrody matematycznej. Jest powszechnie uważany za jednego z najwybitniejszych żyjących matematyków.

Cóż ciekawego w udowodnionym przez Greena i Tao fakcie, że zbiór liczb pierwszych jest szeroki? Otóż struktura zbioru liczb pierwszych jest jedną z najbardziej nieprzeniknionych i tajemniczych struktur matematycznych. Fascynuje ona uczonych co najmniej od czasów Starożytnej Grecji. Przede wszystkim nie znamy ogólnej i szybkiej metody sprawdzania, czy dana liczba jest pierwsza (na tej „słabości" ludzkiego rozumu opiera się zresztą wiele algorytmów kryptograficznych). Tym samym nie jest jasne, w jaki sposób liczby pierwsze są rozmieszczone wśród liczb naturalnych. Zachowują się one bardzo *chaotycznie* i w zasadzie niewiele więcej potrafimy o nich powiedzieć. Pod koniec XIX wieku udowodniono twierdzenie, z którego wynika, że nie są zbiorem gęstym. Był to dość przełomowy wynik, ale potwierdzający intuicję, mówiącą, że znakomita większość liczb naturalnych nie jest pierwsza.

Twierdzenie Greena i Tao, przeciwnie - zdaje się raczej przeczyć naszym intuicjom! Skoro zbiór liczb pierwszych jest szeroki, to znaczy, że znajdziemy w nim dowolnie długie postępy arytmetyczne. Trudno sobie wyobrazić coś bardziej regularnego niż postęp arytmetyczny. Można więc rzec, że Green i Tao pokazali, ze w chaosie zbioru liczb pierwszych można odnaleźć duże kawałki porządku (właśnie w sensie istnienia dowolnie długich postępów arytmetycznych).

Dowód tego twierdzenia nie precyzuje, jak takich postępów szukać i jakie będą ich różnice. Wśród matematyków, zarówno tych profesjonalnych jak i amatorów, trwa pewnego rodzaju wyścig: kto znajdzie dłuższy postęp arytmetyczny złożony z liczb pierwszych. Rekordowe postępy znajdowane są dość regularnie, a palma pierwszeństwa przechodzi z ręki do ręki. Parokrotnie dzierżył ją Jarosław Wróblewski z Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Wrocławskiego. Np. w 2007 roku odkrył on postęp arytmetyczny składający się z 24 wyrazów (z których pierwszy to 468395662504823). Szukanie takich ciągów wymaga sporej pomysłowości, ale też sporej mocy obliczeniowej. Wszelkie problemy z siecią komputerową w Instytucie Matematycznym wciąż komentuje się żartobliwie mówiąc, że Wróblewski szuka liczb pierwszych. Nawiasem mówiąc Jarosław Wróblewski pisał doktorat pod kierunkiem Charlesa Feffermana (również medalisty Fieldsa) na Uniwersytecie w Princeton w czasie, gdy doktorantem był tam również (nastoletni wtedy) Terence Tao. Panowie tworzyli nawet drużynę brydżową.

Wracając do historii zapoczątkowanej twierdzeniem Szemerédiego. Pora, żeby na scenę naszej opowieści wszedł w końcu Mariusz Mirek. Mirek jest profesorem Uniwersytetu Wrocławskiego, na którym ukończył studia matematyczne, tutaj również obronił doktorat przygotowując rozprawę najpierw pod kierunkiem Andrzeja Hulanickiego, a po jego śmierci, pod kierunkiem Ewy Damek. Niedługo po rozpoczęciu pracy w Instytucie Matematycznym Mirek wyjechał na postdoka do Centrum Matematycznego Hausdorffa przy Uniwersytecie w Bonn, na którym się habilitował. W 2012 roku, na krótko przed wyjazdem do Bonn, został zaproszony przez Eliasa M. Steina na Uniwersytet w Princeton. Stein był znakomitym matematykiem, laureatem wielu prestiżowych nagród, autorem powszechnie używanych podręczników i wychowawcą całej rzeszy wybitnych matematyków (w tym promotorem doktoratów Terence'a Tao i Charlesa Feffermana).

Podczas tej wizyty Stein zainteresował Mirka pytaniem o istnienie dyskretnej teorii funkcji kwadratowej Littlewooda–Paley. Było to jedno z ulubionych pytań Steina, nierozwiązane od początku lat dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia, kiedy to Jean Bourgain (kolejny tuz współczesnej matematyki, również laureat Medalu Fieldsa, uważany za najwybitniejszego analityka ostatniego półwiecza) udowodnił słynne punktowe twierdzenie ergodyczne wzdłuż wielomianowych orbit.

Po latach Stein będzie wspominał dzień poznania Mariusza Mirka jako jeden z najszczęśliwszych dni w swoim życiu. Niespełna dwa lata od pierwszego spotkania, Mirkowi udało się skonstruować dyskretny odpowiednik teorii Littlewooda–Paley użyteczny w wielu arytmetycznych problemach. To rozpoczęło bardzo owocną współpracę Mariusz Mirka z Eliasem Steinem. Współpraca obydwu matematyków kwitła przez wiele lat, aż do śmierci Steina w 2018 roku. Mirek i Stein opublikowali wspólnie dziesięć prac, w których łączyli techniki analizy harmonicznej, teorii liczb i teorii ergodycznej.

W okolicach 2015 roku owocami tej współpracy oraz dyskretną teorią Littlewooda–Paley zainteresował się wspomniany wyżej Jean Bourgain, który zaprosił Mirka na roczny staż do Instytutu Badań Zaawansowanych (IAS) w Princeton. Instytut Badań Zaawansowanych w Princeton jest jednostką badawczą w której pracowali sam Albert Einstein, J. Robert Oppenheimer, Kurt Gödel, czy John von Neumann. Aby wyobrazić sobie prestiż tego miejsca warto wspomnieć, że od 1930 roku, daty założenia Instytutu Badań Zaawansowanych, wśród stypendystów jak i stałych pracowników IASu, przewinęło się 35 laureatów nagrody Nobla, 44 z 62 laureatów medalu Fieldsa, 22 z 25 laureatów nagrody Abela oraz wielu stypendystów MacArthura i laureatów nagrody Wolfa. Obecnie Mirek już drugi raz odbywa staż w IAS.

Podczas pierwszego pobytu w IAS Mirek rozpoczął współpracę z Jeanem Bourgainem, która trwała do 2018 roku i zaowocowała pięcioma artykułami. W czasie jednej z wielu matematycznych rozmów Bourgaina z Mirkiem, Mirek dowiedział się o następującej hipotezie:

Hipoteza Furstenberga–Bergelsona–Leibmana. *Niech* $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ *będzie probabilistyczną przestrzenią miarową z odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę* $T : X \to X$*. Niech* $m, N \in \mathbb{N}$ *oraz* $P_1, \ldots, P_m$ *będą wielomianami o całkowitych współczynnikach takimi, że* $P_1(0) = \ldots = P_m(0) = 0$*. Wtedy dla wszystkich*

$f_1, \ldots, f_m \in L^\infty(X)$, niekonwencjonalne wieloliniowe średnie ergodyczne

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(T^{P_1(n)}x)\cdot\ldots\cdot f_m(T^{P_m(n)}x)$$

zbiegają dla μ-prawie wszystkich $x \in X$, gdy $N \to \infty$.

Ta hipoteza była jednym z ulubionych pytań Bourgaina i obecnie stanowi jeden z centralnych nierozwiązanych problemów współczesnej teorii ergodycznej. Nie sposób w prostych słowach wyjaśnić co ta hipoteza dokładnie orzeka, jednak warto wspomnieć, że wyrosła ona na kanwie słynnego twierdzenia Bergelsona–Liebmana (uogólnienia twierdzenia Szemerédiego), mówiącego, że zbiory szerokie zawierają nie tylko dowolnie długie postępy arytmetyczne, ale i dowolnie długie konfiguracje wielomianowe postaci

$$x + P_1(n), x + P_2(n), \ldots, x + P_m(n)$$

dla dowolnych wielomianów $P_1, \ldots, P_m$ jak w wyżej wymienionej hipotezie.

Naszkicowana tu historia toczy się dalej. Najnowszy rozdział napisali Ben Krause, Mariusz Mirek oraz Terence Tao w swoim artykule w Annals of Mathematics. Czytelnik oczekujący, że dokładnie przybliżymy w tym miejscu wyniki uzyskane przez nich w tej pracy, będzie rozczarowany. Jak wspomnieliśmy na początku (i mieliśmy okazję zobaczyć w kontekście sformułowania hipotezy Furstenberga–Bergelsona–Leibmana), opisywanie współczesnych badań matematycznych szerokiej publiczności jest zadaniem dość beznadziejnym. Żeby zobrazować, jak bardzo beznadziejnym, zakończmy nasz artykuł pozostawiając Czytelnika z głównym twierdzeniem ich pracy.

Twierdzenie 1. *Niech $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ będzie σ-skończoną przestrzenią miarową z odwracalnym przekształceniem zachowującym miarę $T : X \to X$. Niech $P \in \mathbb{Z}[\mathrm{n}]$ spełnia $\deg P \geq 2$ i $P(0) = 0$. Wtedy dla wszystkich $1 < p_1, p_2 < \infty$ spełniających $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \leq 1$ i wszystkich $f_1 \in L^{p_1}(X), f_2 \in L^{p_2}(X)$, istnieje funkcja $f^* \in L^p(X)$ taka, że*

$$\lim_{N\to\infty} A_{N;X,T}^{\mathrm{n},P(\mathrm{n})}(f_1, f_2)(x) = f^*(x) \tag{1}$$

dla μ-prawie każdego $x \in X$, oraz w normie $L^p(X)$. Tutaj, $A_{N;X,T}^{\mathrm{n},P(\mathrm{n})}(f_1, f_2)$ jest wielomianową średnią Furstenberga–Weissa

$$A_{N;X,T}^{\mathrm{n},P(\mathrm{n})}(f_1, f_2)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_1(T^n x) f_2(T^{P(n)}x),$$

która zgadza się ze średnią

(2)

$$A_{N;X,T_1,\ldots,T_d}^{P_{1,1}(\mathrm{n}_1,\ldots,\mathrm{n}_k),\ldots,P_{d,m}(\mathrm{n}_1,\ldots,\mathrm{n}_k)}(f_1, \ldots, f_m)(x) = \frac{1}{N^k}\sum_{n\in[1,N]^k\cap^k}\prod_{j=1}^{m} f_j(T_1^{P_{1,j}(n)}\cdots T_d^{P_{d,j}(n)}x)$$

dla $d = k = 1$, $m = 2$, $T_1 = T$, $P_{1,1}(n) = n$, i $P_{1,2}(n) = P(n)$.