UAM

Uniwersytet im A.Mickiewicza w Poznaniu

Wydział Matematyki i Informatyki
Umultowska 87,
61-614 Poznań

Prof.dr hab Leszek Skrzypczak
tel.: +48-61-829-54-73
fax: +48-61-829-53-15
e-mail: lskrzyp@amu.edu.pl

Poznań 22.08.2016

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Grzegorza Kępy
Odwracalność operatorów flagowych na grupie Heisenberga

Praca doktorska mgr. Grzegorza Kępy dotyczy splotowych operatorów całkowych na grupach Heisenberga $\mathbb{H}^n$ z tak zwanym jądrem flagowym. Celem rozprawy jest wykazanie, że jeżeli taki operator jest operatorem odwracalnym w $L^2(\mathbb{H}^n)$ to operator do niego odwrotny jest również operatorem splotu z jądrem flagowym. Wyniki składające się na rozprawę zostały opublikowane w *Journal of Fourier Analysis and Applications* w artykule *"Invertibility in the flag kernels algebra on the Heisenberg group"*, którego jedynym autorem jest mgr Grzegorz Kępa.

Jądra flagowe pojawiły się w pracy D.Müllera, F.Ricciego i E.Steina z 1995 w związku z badaniem mnożników Marcinkiewicza na grupach Heisenberga. Ogólniejszą i formalną definicję operatorów splotu z jądrem flagowym na nilpotentnych grupach jednorodnych podali A.Nagel, F.Ricci i E.Stein w 2001. Definicja jądra flagowego jest ściśle związana z wielo-parametrową strukturą grupy jednorodnych. Podczas gdy jądra splotowych operatory Calderóna-Zygmunda posiadają singularość jedynie w zerze jądra flagowe są dystrybucjami temperowanymi, które mogą posiadać singularność wzdłuż hiperpłaszczyzny. We swojej pracy Nagel, Ricci i Stein wykazują, że dystrybucja K jest jądrem flagowym wtedy i tylko wtedy gdy jej transformata Fouriera jest mnożnikiem flagowym. Ponad to udowodniono tam, że operatory splotu z jądrami flagowymi tworzą podalgebrę algebry $B(L^2(G))$.

Mgr Kępa rozpatruje algebrę operatorów flagowych jedynie na grupach Heisenberga, przy czym definiując jądra flagowe wykorzystuje wspomnianą wyżej równoważność. Zasadnicze twierdzenie rozprawy dotyczy zamkniętości tej algery na odwracanie. operatorów. Mówimy, że podalgebra A algebry $B(L^2(G))$ operatorów ograniczonych na $L^2(G)$ jest zamknięta na odwracanie, jeśli każdy operator należący do A i odwracalny w $B(L^2(G))$ jest także odwracalny w A. Klasyczne twierdzenie w tym zakresie dotyczy algebry operatorów splotu z jądrem jednorodnym stopnia $-n$ na $L^2(\mathbb{R}^n)$. Podobne zagadnienie na grupach jednorodnych było później rozpatrywane m.in. przez M.Christa, D.Gellera i P.Głowackiego. Mgr Kępa pokazał, że jeżeli operator splotu $Op(K)$ związany z jądrem flagowym na grupie Heisenberga $\mathbb{H}^n$ jest odwracalny w $B(L^2(\mathbb{H}^n))$ to operator do niego odwrotny też jest operatorem splotu z jądrem flagowym.

Standardowa argumentacja redukuje dowód twierdzenia do przypadku jąder symetrycznych. Do analizy badanych operatorów splotu konstrukcji jądra flagowego operatora odwrotnego wykorzystano reprezentacje Schrödingera π^λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, grupy Heisenberga oraz rachunek operatorów pseudo-różniczkowych Kohna-Nirenberga. Reprezentacje Schrödingera pozwalają nam sformułować problem w języku operatorów pseudo-różniczkowych, następnie rachunek tych operatorów (twierdzenie Bealsa) pozwala wykazać, że jądro operatora odwrotnego ma żądane własności.

Zasadnicza techniczna trudność jaka się pojawia związana jest z nieograniczonością zbioru na którym jądro flagowe jest singularne. Uniemożliwia to zastosowania tej samej strategii co w przypadku operatorów Calderóna-Zygmunda tzn. podziału jądra na część regularną i singularną o zwartym nośniku. Mgr Kępa rozwiązuje ten problem w następujący sposób. Wpierw definiuje pewną podprzestrzeń $\mathcal{S}_0(\mathbb{H}^n)$ klasy Schwartza $\mathcal{S}(\mathbb{H}^n)$. Przestrzeń $\mathcal{S}_0(\mathbb{H}^n)$ jest gęstym podzbiorem w przestrzeni $L^2(\mathbb{H}^n)$ i jest niezmiennicza ne względu na splatanie z jądrem flagowym. Aby udowodnić ten ostatni fakt wykorzystuje się rachunek symboliczny wprowadzony przez Głowackiego. Co więcej identyczne działanie jąder flagowych na tej przestrzeni poprzez splot implikuje identyczność tych jąder w sensie dystrybucyjnym. W konsekwencji możemy określić reprezentację Schrödingera π_K^λ jądera flagowego K. Następny krok polega na wykazaniu, że odwracalność operatora splotu $Op(K)$ określonego przez symmetryczne jądro flagowe K implikuje odwracalność rodziny operatorów $\{\pi_K^\lambda\}_\lambda$, przy czym rodzina operatorów odwrotnych $\{(\pi_K^\lambda)^{-1}\}_\lambda$ jest jednostajnie ograniczona w $L^2(\mathbb{H}^n)$, por. Twierdzenie 7.4.

Operatory $\{\pi_K^\lambda\}_\lambda$ są operatorami pseudo-różniczkowymi a oszacowania ich symboli Kohn-Nirenberga nie zależą od λ. Na podstawie twierdzenia Calderona-Vaillancourta wiemy, że takie operatory są jednostajnie ograniczone w $L^2(\mathbb{H}^n)$. W konsekwencji na podstawie twierdzenia Bealsa operatory do nich odwrotne są opeartorami pseudo różniczkowymi, których symbole b_λ mają seminormy ograniczone jednostajnie ze względu na λ. W końcu dowodzi się, że dystrybucja B określona wzorem $\widehat{B}(w,\lambda) = b_\lambda(|\lambda|^{-1/2}w)$ jest jądrem flagowym. Ta dystrybucja definiuje nam jądro L operatora odwrotnego do $Op(K)$, $L = \widetilde{B}$.

Rozprawa doktorska składa się z dwóch części, Pierwsza jest jedynastostronicowym wprowadzeniem zredagowanym w języku polskim. Druga natomiast to wspominany na początku artykuł opublikowany w Journal of Fourier Analysis and Applications, liczący 21 stron. Nie jest to zatem rozprawa obszerna, tym bardziej, że wprowadzenie jest dosyć pobieżnym omówieniem części drugiej, nie omawiającym szerzej kontekstu badań, nie wyjaśniającym bliżej wyników i metod, z których w dowodach się korzysta, np. rachunku symbolicznego P. Głowackiego.

Silną stroną tej rozprawy jest niewątpliwie jasno postawiony cel badawczy, który został zrealizowany. Tematyka rozprawy nawiązuje do aktualnie prowadzonych badań w liczących się na świecie ośrodkach prowadzących badania z zakresu analizy harmonicznej. Jądra flagowe są moim zdaniem naturalnym uogólnieniem jąder Calderóna-Zygmunda. Aparat matematyczny użyty w dowodach jest skomplikowany. Dowody są poprawne i dobrze zredagowane.

Z przesłanych mi materiałów wynika, że mgr Kępa jest autorem jednej publikacji, która zgodnie zgodnie z MathSciNet nie doczekała się cytowań. Mgr Kępa rozpoczął studia doktoranckie na Uniwersytecie Wrocławskim 2012, w trakcie tych studiów brał udział w 6 konferencjach, materiały nie zawierają informacji o w tym czy wygłaszał na tych konferencjach komunikaty lub wykłady.

Reasumując uważam, że pomimo niewielkiej objętości i wspomnianych usterek rozprawa doktorska mgr Grzegorza Kępy stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, spełnia zatem wymogi Ustawy o tytule i stopniach naukowych z dnia 14 marca 2003 r. z późniejszymi zmianami. Wnioskuję o dopuszczenie mgr Grzegorza Kępy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.