Prof. dr hab. Łukasz Delong
Instytut Ekonometrii, Kolegium Analiz Ekonomicznych
SGH Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Warszawa, 11.01.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Adama Kaszubowskiego pt. *"Exit problems for Lévy type models and their applications"*

Rozprawa doktorska Pana Adama Kaszubowskiego dotyczy problemów wyjścia dla procesów typu Lévy'ego, które znajdują zastosowania m.in. w matematyce ubezpieczeniowej do wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny lub wartości wypłaconych dywidend. Oba te zastosowania Autor rozważa w swojej rozprawie.

Rozprawa doktorska składa się z trzech rozdziałów. **Rozdział I** stanowi wstęp do rozprawy, w którym Autor przedstawia definicje oraz główne własności procesów, które są wykorzystywane w dalszej części. Rozdziały II i III zawierają główne wyniki rozprawy doktorskiej. Rozdziały te oparte są na trzech artykułach, które zostały opublikowane w Journal of Optimization Theory and Applications (wyniki z Rozdziału II) oraz Advances in Applied Probability i Silesian Statistical Review (wyniku z Rozdziału III), i są efektem współpracy Autora z dr hab. Irminą Czarną, prof. Zbigniewem Palmowski i dr. Shu Li.

W **Rozdziale II** Autor rozwiązuje problem optymalnych dywidend z kosztami w modelu nadwyżki ubezpieczyciela, w którym proces środków własnych ubezpieczyciela modelowany jest załamanym spektralnie ujemnym procesem Lévy'ego i moment ruiny jest momentem paryskiej ruiny, czyli dopuszczamy pobyt środków własnych ubezpieczyciela poniżej zera przez pewien okres czasu. W rozdziałach 2.1-2.3 Autor przypomina definicję momentu ruiny paryskiej, pojęcie i własności załamanego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego oraz podstawowe formuły dla problemów wyjścia, w szczególności funkcje skalujące $V^{(q)}$, które są wykorzystywane w kolejnych podrozdziałach. W rozdziale 2.4 jest rozwiązany główny i nowy problem wypłaty dywidend z kosztami. Autor proponuje strategię impulsową z dwoma progami (c_1, c_2), wyznacza funkcję wartości dla tej strategii oraz wskazuje własności funkcji wartości w Proposition 2.4.1-2.4.3 i Lemma 2.4.4. Następnie, Autor dowodzi twierdzenie o weryfikacji dla optymalnej funkcji wartości (Lemma 2.4.6) i pokazuje, że zaproponowana funkcja wartości spełnia warunki dla optymalnej funkcji wartości (Lemma 2.4.8-2.4.9 i Theorem 2.4.10). W rozdziale 2.4.5 rozważane są dwa szczególne przykłady: liniowego ruchu Browna i złożonego procesu Poissona z wykładniczymi skokami. Dla obu przypadków, Autor wyznacza funkcje skalujące $V^{(q)}$ i $\omega^{(q)}$ oraz pokazuje, że istnieją optymalne progi (c_1^*, c_2^*) spełniające powyższe twierdzenia.

Wyniki przedstawione w Rozdziale II są rozszerzeniem wyników zawartych w pracy "An optimal dividends problem with transaction costs for spectrally negative Lévy processes" autorstwa R. Loeffen. Rozszerzenie polega na wprowadzeniu procesu z załamaniem i paryskiego momentu ruiny. Techniki dowodów są podobne, i w kluczowych miejscach Autorzy

dD

wykorzystali funkcje skalujące dla załamanego spektralnie ujemnego procesu Lévy'ego i paryskiego momentu ruiny (z pracy [42]).

Rozdział III dotyczy problemów wyjścia dla procesów markowsko - addytywnych ze spektralnie ujemnymi procesami Lévy'ego, które są niezależnie zabijane z intensywnością zależną od bieżącej wartości procesu stochastycznego. Przedstawiono również zastosowania problemów wyjścia w problemach wypłaty dywidendy i prawdopodobieństwa ruiny. W rozdziale 3.1 Autor omawia macierze skalujące $\mathbf{W}^{(q)}$ i klasyczne problemy wyjścia dla procesów markowsko-addytywnych ze spektralnie ujemnymi procesami Lévy'ego cytując wyniki z prac [27], [29] i [38]. W rozdziale 3.1.3 Autor samodzielnie pokazuje jak wyznaczyć macierz skalującą $\mathbf{W}^{(q)}$ dla szczególnego przypadku liniowego ruchu Browna. W kolejnym kroku, w rozdziale 3.2 Autor cytuje wyniki z pracy [41], omawia funkcje skalujące $\mathcal{W}^{(\omega)}$ i problemy wyjścia dla spektralnie ujemnych procesów Lévy'ego, które są niezależnie zabijane z intensywnością ω zależną od bieżącej wartości procesu Lévy'ego. W rozdziale 3.2.3 Autor samodzielnie wyprowadza równanie różniczkowe dla funkcji skalującej $\mathcal{W}^{(\omega)}$ dla złożonego procesu Poissona z wykładniczymi skokami i stosuje tę funkcję do wyznaczenia prawdopodobieństwa ruiny w tzw. modelu Omega nadwyżki ubezpieczyciela, gdzie ruina zdefiniowana jest jako moment kumulacji nałożonych kar ω dla procesu środków własnych w wyniku przebywania procesu w danym obszarze zagrożenia. Rozdział 3.3 zawiera główne i nowe wyniki nt. macierzy skalujących $\mathcal{W}^{(\omega)}$, w szczególności Theorem 3.3.2, 3.3.5, Corollary 3.3.7 zawierają wyniki dla problemów wyjścia dla procesów markowsko-addytywnych ze spektralnie ujemnymi procesami Lévy'ego, które są niezależnie zabijane z intensywnością zależną od bieżącej wartości procesu stochastycznego. Rozdział 3.3 stanowi więc ujednolicenie i uogólnienie wyników z rozdziałów 3.1 i 3.2 oraz prac w nich cytowanych. Jednakże, Autor nie brał udziału w przygotowywaniu wyników zawartych w tym rozdziale. Wyniki z rozdziału 3.3 są stosowane przez Autora w problemach matematyki ubezpieczeniowej w rozdziałach 3.4-3.5. W rozdziale 3.4 Autor wyznacza funkcję wartości oczekiwanej zdyskontowanych dywidend w modelu Omega, przy założeniu, że dywidendy wpłacane są zgodnie ze strategią barierową i założonym progiem c. Wynik wyrażony jest przy pomocy macierzy skalującej $\mathcal{W}^{(\omega)}$, gdzie ω oznacza funkcję kary w modelu Omega. W rozdziałach 3.5.1-3.5.3 Autor wyznacza macierze skalujące $\mathcal{W}^{(\omega)}$ dla modulowanego linowego ruchu Browna i szczególnych postaci intensywności ω. W szczególności, Autor rozwiązuje równanie Sylvestera w Proposition 3.5.3 i zapisuje układ równań różniczkowych dla $\mathcal{W}^{(\omega)}$ w rozdziale 3.5.3. W końcu, w rozdziale 3.5.4 Autor przedstawia jak przy pomocy symulacji wyznaczyć prawdopodobieństwo ruiny w modelu Omega z modulowanym liniowym ruchem Browna.

Konkluzja:

Rozprawę przeczytałem z bardzo dużym zainteresowaniem. Wyniki przedstawione w rozprawie są imponujące z matematycznego punktu widzenia. Jednakże, mam wrażenie, w oparciu o załączone informacje o udziałach w artykułach, że wkład Autora w te wyniki nie był dominujący. Jednocześnie, w mojej opinii, udział Autora był ważny i istotny w przygotowaniu wspomnianych artykułów.

Podsumowując, moim zdaniem, praca zawiera bardzo ciekawe i nowe elementy z teo-

KP

rii procesów stochastycznych, które można wykorzystać w matematyce ubezpieczeniowej. Rozprawa doktorska zawiera oryginalne rozwiązania pewnych ważnych problemów naukowych. W oparciu o fragmenty samodzielnie przygotowane przez Autora, oceniam, że Autor wykazał się wiedzą teoretyczną oraz umiejętnością prowadzenia pracy naukowej. Uważam, że warunki określone w art. 13 ust. 1 Ustawy z dn. 14 marca 2003 o stopniach naukowych i tytule naukowym zostały spełnione. Wnoszę o dopuszczenie do publicznej obrony.

Szczegółowe uwagi:

Poniżej załączam moje uwagi, które nie wpływają na pozytywną konkluzję, którą przedstawiłem powyżej. Chciałbym podkreślić, że nie oczekuję, że uwagi wskazane poniżej zostaną wprowadzone do rozprawy, i nie wnioskuję o poprawienie rozprawy doktorskiej. Zgłoszone przeze mnie kluczowe uwagi i pytania, te dotyczące dowodów i wniosków matematycznych, chciałbym omówić w trakcie obrony.

Kluczowe uwagi i pytania:

Rozdział II:

- W którym miejscu jest wykorzystywane założenie $\delta < \gamma + \int_0^1 x\Pi(dx)$? Nierówność, w której pojawia się $\int_0^1 x\Pi(dx)$, sugeruje, że rozważamy procesy o skończonym wahaniu. Rozumiem, że dopuszczamy procesy o nieskończonym wahaniu i nierówność jest wtedy automatycznie spełniona?
- Czy para (c_1^*, c_2^*) z Proposition 2.4.2 jest jedyna? Czy można udowodnić twierdzenie o unikalnej parze, zakładając log-wypukłość miary Lévy'ego, które znajduje się w pracy Loeffena?
- Wydaje się, że w dowodzie Proposition 2.4.2 potrzebujemy założenia, że $\mathbb{E}[X_r] > 0$, czyli założenia *net profit condition*. Prośba o sprawdzenie i komentarz. I oczywiście potrzebujemy $W^{(q)\prime}(x) \to \infty$ dla $x \to \infty$, co zachodzi, ale nie zostało wskazane w dowodzie,
- Brakuje dowodu gładkości funkcji $V^{(q)}$ wynikających z własności $W^{(q)}$. Kiedy $V^{(q)} \in \mathcal{C}^1, V^{(q)} \in \mathcal{C}^2$, $V^{(q)\prime}$ jest absolutnie ciągła z lokalnie ograniczoną gęstością, i na jakich zbiorach? Analogicznie dla funkcji (kandydata optymalnej funkcji wartości dla problemu) z Propositon 2.4.3. W Remark 2.4.7 gładkość $V^{(q)}$ jest wyrażona poprzez gładkość $W^{(q)}$, ale nie jest jasne, czy te warunki bezpośrednio przechodzą z $W^{(q)}$ na $V^{(q)}$ i Proposition 2.1.1 sugeruje, że tak nie jest. Proszę doprecyzować gładkość $V^{(q)}$ ponieważ funkcja ta wykorzystana jest do zdefiniowania kandydata na optymalną funkcję wartości, który musi spełniać założenia Lemma 2.4.6. Twierdzenia, w których pojawia się *"Let $V^{(q)}$ be sufficiently smooth"* nie są precyzyjne,
- Czy w dowodzie Lemma 2.4.6 i dowodzie, że wartość oczekiwana lokalnego martyngału w pierwszym wzorze na s. 37, nie potrzebujemy założenia o skończonej wartości skoków, czyli $\int_{y>1} y\Pi(dy) < \infty$? Interesuje mnie w jaki sposób pokazano, że

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^{T_n}\int_{y>1}\Big(h(U_s - y) - h(U_s)\Big)\Pi(dy)ds\Big] < \infty?$$

ΛΓ)

- W Proposition 2.4.2 powiniśmy chyba jednak żądać, aby $V^{(q)} \in C^1$ na C^*, aby zdefiniować warunek (2.13) - wydaje się, że warunek ten będzie spełniony, bo $\omega^{(q)} \in C^1((0,\infty))$ gdy $W^{(q)} \in C^1((0,\infty)$ z Proposition 2.1.1. Prośba o komentarz,
- Prosiłbym o dokładne określenie warunków, które musi spełniać funkcja h w dowodzie Lemma 2.4.6 i komentarz, czy funkcja z Proposition 2.4.3 (oraz model nadwyżki ubezpieczeniowej) spełnia te warunki,
- Czy dla optymalnej strategii nie powinniśmy mieć równości w (2.22)? W dowodzie Lemma 2.4.9 pokazano, że $(\Gamma - q)v^*(x) < 0$ dla $x < 0$, przypuszczałbym jednak, że powinno zachodzić $(\Gamma - q)v^*(x) = 0$ dla $x < c_2^*$. Prośba o wytłumaczenie,
- W dowodzie Lemma 2.4.9 napisano *From Lemma 2.4.4 it is sufficient to prove (2.16)*. Zwracam uwagę, że w Lemma 2.4.4 udowodniono nierówność dla $x \geqslant y \geqslant 0$ podczas, gdy w Lemma 2.4.6 ta nierówność powinna być spełniona dla $x \geqslant y$ i $x, y \in \mathbb{R}$. Proszę doprecyzować, dla jakich x i y potrzebujemy (2.17) i czy kandydat spełnia te warunki,
- W dowodzie Lemma 2.4.9, czy zawsze możemy zamienić $(\Gamma - q)V^{(q)}(x) = (\Gamma - q)\int_0^\infty ... = \int_0^\infty(\Gamma - q)...$? Czy nie należałoby uzasadnić twierdzenia Lebesgue'a w tym miejscu? Wydaje się, że pokazując, że $(\Gamma - q)V^{(q)}(x) < 0$ dla $x < 0$ chyba znowu korzystamy z założenia $\mathbb{E}[X_r] > 0$, które nie pojawia się w pracy?
- (2.27) nie zostało zdefiniowane dla $x = 0$ i $x = c_2^*$. Jest dla mnie jasne, że operatora $\Gamma - q$ nie możemy zdefiniować dla $v^*(x)$ dla $x = c_2^*$ ponieważ funkcja v^* nie jest dwukrotnie różniczkowalna w tym punkcie (zmienia swoją postać), ale dlaczego nie możemy w $x = 0$? Oznacza to, że pochodne $V^{(q)}$ nie istnieją w $x = 0$, co może rodzić problemy z punktu widzenia twierdzenia o weryfikacji. Prośba o komentarz,
- W Theorem 2.4.14 i 2.4.18, skąd wiadomo, że zawsze $a_R^* < c_2^*$? Potrzebujemy tego warunku, aby stwierdzić, że istnieje rozwiązanie optymalne. Skąd wiadomo w tych przykładach, że (c_1^*, c_2^*) jest dokładnie jedno? Czy można, zakładając log-wypukłość miary Lévy'ego, pokazać, że dla c_2^* z Proposition 2.4.2 zachodzi zawsze (2.31), tak jak w pracy Leoffena?
- W przykładach numerycznych w rozdziale 2.4.5 dla złożonego procesu Poissona pojawia się kometarz, że $V^{(q)'}$ nie jest ciągła w $x = 0$. Czy nie potrzebujemy założenia $V^{(q)} \in C^1((-pr, c_2^*))$, aby pokazać, że kandydat na optymalną funkcję wartości spełnia założenia twierdzenia o weryfikacji?

Rozdział III:

- W Proposition 3.2.2 pokazano, że funkcja skalująca $\mathcal{W}^{(\omega)}(x, -d)$ spełnia równanie różniczkowe, nie zostało jednak skomentowane, zanim przyłożono pochodne do (3.17), że funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna i możemy szukać klasycznego rozwiązania równania (3.20) zamiast rozwiązania równania całkowego (3.16). Co wiemy, w ogólności i w przedstawionym przykładzie, o gładkości funkcji $x \mapsto \mathcal{W}^{(\omega)}(x, y)$ dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$?

dD

- Analogicznie jak powyżej, co wiemy o gładkości funkcji macierzy skalujących $\mathcal{W}^{(\omega)}(x)$ spełniających równania (3.21)? W ogólności, jak należy rozwiązać równania całkowe (3.21) numerycznie? Przy jakich założeniach możemy sprowadzić równania całkowe do równań różniczkowych i przy jakich założeniach otrzymane równania różniczkowe posiadają dokładnie jedno rozwiązanie klasyczne, w ogólności i w szczególności dla przykładu w rozdziale 3.5.3. W przykładzie w rozdziale 3.5.3, i również 3.2.3, pojawia się komentarz o założeniu ciągłości $\omega(x) = (\gamma_0 + \gamma_1(x+d))1\{-d \leqslant x \leqslant 0\}$, co oznacza, że wymagamy $\gamma_0 + \gamma_1 d = 0$, co jest dużym ograniczeniem przedstawionego rozwiązania w oparciu o równania różniczkowe - prośba o komentarz,

- Czy można rozszerzyć (wyprowadzić) analityczny wzór na prawdopodobieństwo ruiny z Proposition 3.2.3 na $x \in (-d, 0)$. Prośba o komentarz,

- Czy w rozdziale 3.5.4, gdzie numerycznie wyznaczamy prawdopodobieństwo ruiny w nieskończonym horyzoncie czasu, nie można było zastosować metody importance sampling, tak aby przy nowej mierze prawdopdobieństwo ruiny wynosiło 1 - w klasycznym modelu nadwyżki ubezpieczyciela stosujemy metodę transformacji Esschera do zmiany dynamiki procesu,

- Czy można rozszerzyć wyniki dotyczące prawdopodobieństwa ruiny z Proposition 3.2.3 lub z pracy Li, Palmowskiego na procesy modulowane? Wydaje się, że podobne techniki co w Proposition 3.2.3 (zaczerpnięte z pracy Li, Palmowski) można zastosować do modulowanego liniowego ruchu Browna z macierzą skalującą (3.4). Prośba o komentarz.

Pozostałe uwagi:

Rozdział I:

- Z uwagi na fakt, że Rozdział I pełni rolę wstępu do rozprawy, wydaje się, że należało także podać warunki, kiedy $W^{(q)\prime}$ jest absolutnie ciągła, lub kiedy $W^{(q)} \in \mathcal{C}^2$, ponieważ własności te są wykorzystywane w dalszej części - należało rozbudować i podać wnioski z Theorem 1.4.7,

- Brakuje także opisu zachowania $W^{(q)}$ i $W^{(q)\prime}$ dla $x \to \infty$,

- Moim zdaniem w rozdziale 1.5 należało opisać problem optymalnej dywidendy z pracy [43] z kosztami, a nie z [44], bo jest bliższy temu co zostało przedstawione w Rozdziale II.

Rozdział II:

- Funkcję wartości przy paryskiej ruinie należało zdefiniować dla każdego $x \in \mathbb{R}$, a nie tylko dla $x > 0$ (rozdział 2.4.1). Bardziej precyzyjnie, należało określić zbiór $\mathcal{X}$, który zawiera co najmniej $[0, \infty)$, dla którego funkcja wartości $v(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$,

XV

- Pewne założenia gubią się w pracy, np. proces Lévy'ego startuje z $X_0 = x$, a nie jak w definicji w Rozdziale 1 $X_0 = 0$, spektralnie ujemny proces Lévy'ego ma miarę Lévy'ego na $(0, \infty)$, $\delta < \gamma + \int_0^1 x\Pi(dx)$,
- We wzorze (2.2) można było podać definicję $\omega^{(q)}(x, a)$ dla $x < 0$,
- Nigdzie w pracy nie zdefiniowano $\mathbb{E}[A; B]$ jako $\mathbb{E}[A1(B)]$,
- W Lemma 2.4.8, (2.25) zachodzi dla $x > 0$,
- Na s. 41, dz należy zastąpić dr.

Rozdział III:

- W Proposition 3.1.1 należy założyć, że $U_{ii} = 0$,
- W dowodzie Proposition 3.1.1, na s. 57 w pierwszym wzorze: należy usunąć $\mathbb{E}_i[e^{\alpha X^i_h}]$,
- We wzorze (3.14), i także poniżej w rozprawie, pojawia się $\omega(s)$, co sugeruje, że funkcja ω nie może zależeć od X_s, podczas gdy możemy dopuścić $\omega(X_s)$. Powinno też być $e^{-\int_0^\infty \cdots}$ zamiast $e^{\int_0^\infty \cdots}$ w (3.14),
- W rozdziale 3.2.2, chyba lepiej napisać, że dla każdego $y \in \mathbb{R}$ istnieją rozwiązania równań (3.13) - czyli funkcje $x \mapsto \mathcal{W}^{(\omega)}(x, y)$ i $x \mapsto \mathcal{Z}^{(\omega)}(x, y)$ dla zadanego y,
- Na s. 81, w pierwszej linijce: powinno być $v_c(x) = A^{(\omega+\delta)}(x, c)v_c(c)$ zamiast $v_c(x) = A^{(\omega}(x, c)v_c(c)$, na s. 89 przed (3.55) powinno być $\mathcal{W}^{(\omega+\delta)}(.)$ zamiast $\mathcal{W}^{(\omega)}(.)$,
- Rozdział 3.5.3 kończy komentarz o problemie optymalnej dywidendy. Spodziewałbym się, że optymalna strategia barierowa będzie zależała od stanu łańcucha Markowa, czyli szukalibyśmy $(c_i^*)_{i\in E}$ zamiast jednego optymalnego progu c^*,
- Rozdział III zawiera różne wyniki i przykłady, prezentacja wyników i przykładów mogła być bardziej czytelna.

Łukasz Dębicki