

Wrocław, 14.05.2021

prof. dr hab. Adam Nowak  
Instytut Matematyczny  
Polskiej Akademii Nauk

## Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Agnieszki Hejny

pod tytułem

*Harmonic analysis and Hardy spaces in the rational Dunkl setting*  
(*Analiza harmoniczna i przestrzenie Hardy'ego w kontekście dunklowskim*)

### Informacje wstępne

Rozprawa doktorska mgr Agnieszki Hejny liczy około 220 stron i jest napisana w języku angielskim. Dysertacji towarzyszy streszczenie opisujące wyniki rozprawy, które zostało przygotowane w dwóch wersjach językowych: polskiej i angielskiej.

Rozprawa podzielona jest na 14 rozdziałów, z których pierwszy ma charakter wstępny. Kolejne rozdziały są zgrupowane w 4 zasadnicze części tematyczne. Zawierają one rezultaty otrzymane przez doktorantkę i są oparte na następujących pracach matematycznych.

- [P1] J. Dziubański, A. Hejna, *Hörmander's multiplier theorem for the Dunkl transform*, J. Funct. Anal. 277 (2019), 2133–2159.
- [P2] J. Dziubański, A. Hejna, *On semigroups generated by sums of even powers of Dunkl operators*, preprint 2019. arXiv:1905.07344
- [P3] J. Dziubański, A. Hejna, *Singular integrals in the rational Dunkl setting*, preprint 2019. arXiv:1910.06433
- [P4] J. Dziubański, A. Hejna, *Remark on atomic decompositions for the Hardy space  $H^1$  in the rational Dunkl setting*, Studia Math. 251 (2020), 89–110.
- [P5] J. Dziubański, A. Hejna, *Upper and lower bounds for Littlewood-Paley square functions in the Dunkl setting*, Studia Math. (przyjęta do druku).
- [P6] A. Hejna, *Hardy spaces for the Dunkl harmonic oscillator*, Math. Nachr. 293 (2020), 2112–2139.
- [P7] A. Hejna, *Schrödinger operators with reverse Hölder class potentials in the Dunkl setting and their Hardy spaces*, preprint 2019. arXiv:1912.11352
- [P8] A. Hejna, *Behavior of eigenvalues of certain Schrödinger operators in the rational Dunkl setting*, preprint 2020. arXiv:2004.10124

Jak widać, prace [P1,P4,P6] zostały już opublikowane w bardzo dobrych periodykach matematycznych, natomiast praca [P5] została przyjęta do druku. Pozostałe zostały zgłoszone do druku i oczekują na decyzje redakcji.

Prace [P1–P5] są wspólne, w każdej z nich jako współautor występuje promotor. Z załączonego szczegółowego oświadczenia prof. Jacka Dziubańskiego wynika, że wkład doktorantki w powstanie tych prac w każdym przypadku był bardzo znaczący, oceniany ogólnie przez prof. Dziubańskiego na co najmniej 50%. Z oświadczenia dowiadujemy się również, iż charakter tej współpracy w naturalny, wręcz modelowy, sposób ewoluował z relacji doktorant/promotor do współpracy na równorzędnych zasadach. Ponadto doktorantka posiada samodzielny wkład w istotne fragmenty/wyniki rzeczonych prac wspólnych, a jej udział w całości prac dotyczy również najwyższej warstwy ideowej.

## Zarys tematyki

Rozprawa dotyczy pewnych zagadnień analizy harmonicznej i teorii przestrzeni Hardy'ego w sytuacji dunklowskiej. Kontekst ten jest dobrze umotywowanym rozszerzeniem klasycznej sytuacji euklidesowej. Jego geneza sięga przełomu lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku i serii fundamentalnych prac Charlesa Dunkla, w których wprowadził on i badał system komutujących operatorów różniczkowo-różnicowych wyznaczonych przez (skończoną) grupę odbić w  $\mathbb{R}^n$  i tzw. funkcję krotności. Operatory Dunkla były punktem wyjścia do zdefiniowania i badania rozmaitych obiektów z nimi stowarzyszonych, w szczególności laplasjanu Dunkla i transformaty Dunkla. W przypadku trywialnej funkcji krotności (a więc de facto przy braku ingerencji odbić) wspomniane powyżej obiekty redukują się do standardowych pochodnych kierunkowych/cząstkowych, klasycznego laplasjanu i transformaty Fouriera, odpowiednio. Analogiczna redukcja ma miejsce w przypadku translacji dunklowskich i splotu dunklowskiego. Tak więc kontekst dunklowski uogólnia sytuację klasyczną i naturalnym zadaniem poznawczym (a posteriori wspartym przez dalsze solidne motywacje) jest definiowanie i badanie odpowiedników innych klasycznych obiektów analitycznych (abstrahując od aspektów algebraicznych teorii, których studiowanie jest również ważnym nurtem). Ten program był realizowany przez wielu autorów na przestrzeni ubiegłych dekad, a wzmożoną intensywność tych działań można obserwować w ostatnich latach. Jakkolwiek, pomimo wysiłków i sporego nakładu pracy badaczy, obecny rozwój analizy dunklowskiej trudno uznać za satysfakcjonujący.

U podstaw takiego stanu rzeczy leżą zasadnicze trudności generowane przez ogólność kontekstu (dowolność stowarzyszonej grupy odbić) oraz analityczną niejawność i strukturalną złożoność podstawowych obiektów, a także nielokalność operatorów/laplasjanu Dunkla. Ponadto pojawiają się rozmaite efekty niezgodne z intuicjami czerpanymi z analizy euklidesowej, przykładowo brak odpowiednika formuły Leibniza czy fakt, że translacje dunklowskie nie tworzą grupy. W konsekwencji klasyczne rozumowania na ogół nie przenoszą się na przypadek dunklowski, a niektórych kluczowych obiektów wręcz nie można zdefiniować poprzez bezpośrednią analogię. Co więcej, w analizie dunklowskiej mamy do czynienia ze swoistego rodzaju stagnacją powodowaną wieloletnią niemożnością rozstrzygnięcia kilku trudnych kwestii, newralgicznych dla dalszego rozwoju teorii, przede wszystkim:

- (K1) brak wiedzy o (jednostajnej)  $L^p$ -ograniczoności,  $p \neq 2$ , translacji dunklowskich (w konsekwencji m.in. brak wiedzy o fundamentalnych własnościach splotu dunklowskiego),
- (K2) brak wystarczająco precyzyjnego opisu zachowania jądra ciepła Dunkla, tzn. jądra całkowitego pólgrupy operatorów generowanej przez laplasjan Dunkla.

Są to obecnie dwa najistotniejsze, jak się wydaje, problemy otwarte w analitycznej teorii Dunkla.

## Wyniki rozprawy

Dysertacja powstała w drodze realizacji dobrze umotywowanego i zaplanowanego, rozległego planu zaawansowanych badań naukowych. Ze względu na bogactwo wyników trudno w tym miejscu podać zwięzły opis otrzymanych rezultatów, poprzestaną zatem na lapidarnym przeglądzie. Dokładniejsze opisy, wraz z motywacjami i tłem literaturowym, są podane w streszczeniu rozprawy i rozdziale wprowadzającym.

W Części II rozprawy badane są fundamentalne operatory analizy harmonicznej w kontekście dunklowskim: funkcje maksymalne, operatory mnożnikowe, całki singularne typu

splotowego i funkcje kwadratowe typu Littlewooda-Paley'a. Główne wyniki dotyczą zachowania tych operatorów na przestrzeniach  $L^p$ . Ponadto badane są półgrupy operatorów generowane przez parzyste potęgi laplasjanu Dunkla, gdzie otrzymuje się oszacowania górne stowarzyszonych jąder splotowych i całkowych.

Część III dotyczy przestrzeni Hardy'ego  $H^1$  w sytuacji dunklowskiej. Podane są m.in. nowe charakteryzacje tych przestrzeni, bada się również zachowanie operatorów mnożnikowych na nich. Ponadto definiuje się i charakteryzuje lokalne przestrzenie Hardy'ego w sensie Goldberga.

W Części IV rozwijana jest teoria związana z operatorami Dunkla-Schrödingera. Wśród głównych wyników należy tu wymienić oszacowania dotyczące rozłożenia wartości własnych operatora Dunkla-Schrödingera oraz charakteryzacje przestrzeni Hardy'ego  $H^1$  związanych z takim operatorem.

W celu uzyskania tych wszystkich rezultatów doktorantka buduje cały aparat dowodowy i zbiór narzędzi, które mają dużo szersze znaczenie i w moim odczuciu są sendem i głównym osiągnięciem dysertacji. Temu poświęcona jest Część I rozprawy i pewne fragmenty pozostałych części. Najważniejsze z oryginalnych wyników dysertacji w tym zakresie są następujące.

- (A) Oszacowania i lematy związane z translacjami/splotami dunklowskimi.
- (B) Istotne wzmocnienie znanych uprzednio oszacowań dunklowskiego jądra ciepła o dodatkowy czynnik malejący.
- (C) Sformułowanie i udowodnienie nierówności typu Feffermana-Phonga w sytuacji dunklowskiej.

Uzyskanie (A)–(C) otworzyło szerokie pole badań i zaowocowało mnogością rezultatów, zarówno zupełnie nowych, jak i wzmocnień/rozszerzeń już istniejących w literaturze. To ostatnie stwierdzenie dotyczy szczególnie zasadniczego złamania restrykcji radialności (ewentualnie niezmienniczości na odbicia) w niektórych wynikach znanych wcześniej. Zauważmy ponadto, że (A) jest efektywną próbą przewyciężenia niedogodności związanych z nierozstrzygniętą kwestią (K1), natomiast (B) stanowi ważny krok w kierunku rozwiązania (K2) i uzyskania ostatecznych optymalnych szacowań dunklowskiego jądra ciepła. Z kolei (C) jest fundamentalne dla rozwoju analizy operatorów Dunkla-Schrödingera.

Należy podkreślić, że wiele, jeśli nie większość, rozumowań dowodowych w rozprawie ma skomplikowany techniczny charakter, których przeprowadzenie jest wysoce niebanalne. Bardzo dobrą strategiczną ideą okazało się spojrzenie na podjętą problematykę z perspektywy analizy na przestrzeniach typu jednorodnego, w tym wykorzystanie technik pochodzących z teorii operatorów Calderóna-Zygmunda. Wreszcie warto wspomnieć, że istotnym źródłem inspiracji, być może nawet w jakimś sensie punktem wyjścia, do programu badań podjętych w dysertacji, była obszerna praca doktorantki wspólna z J.-Ph. Ankerem i promotorem [*Harmonic functions, conjugate harmonic functions and the Hardy space  $H^1$  in the rational Dunkl setting*, J. Fourier Anal. Appl. 25 (2019), 2356–2418], co w szczególności pokazuje, że wkład mgr Hejny do analizy dunklowskiej jest jeszcze szerszy niż ramy jej monumentalnej rozprawy.

### Ocena

Dysertacja mgr Agnieszki Hejny ma zdecydowanie charakter pracy badawczej zawierającej wyniki oryginalne i wartościowe. Są one dobrze umotywowane, w szczególności solidnie umocowane w istniejącej literaturze, tworzą spójną całość oraz wpisują się w tematykę badań podejmowanych wcześniej i aktualnie w wielu ośrodkach naukowych. Większość rezultatów rozprawy została już opublikowana w renomowanych czasopismach matematycznych.

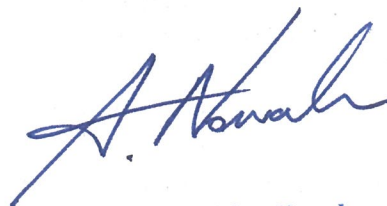
Pod względem redakcyjnym i strukturalnym dysertacja prezentuje się bardzo dobrze. Rezultaty formułowane są przejrzysto a dowody prowadzone z należytą dbałością o detale, w sposób przyjazny dla czytelnika. Redakcja dysertacji<sup>‡</sup> stoi na wysokim poziomie, co znamionuje wysoką kulturę matematyczną doktorantki.

Nie ulega wątpliwości, iż doktorantka posiada szeroką wiedzę z zakresu tematyki rozprawy oraz świetne rozeznanie literaturowe (bibliografia w rozprawie liczy grubo ponad 100 pozycji). Opanowała warsztat subtelnych narzędzi analitycznych i z powodzeniem go stosuje, wykazując się przy tym sporą dozą pomysłowości. Potrafi operować trudnymi technikami czy delikatnymi argumentami. Posiadła głębokie zrozumienie problematyki podejmowanej w dysertacji i samodzielność badawczą, można zaryzykować stwierdzenie, że obecnie jest już ekspertem w analizie dunklowskiej.

Imponujące są mnogość, czy wręcz panoramiczność rezultatów, a co za tym idzie nie-standardowa objętość rozprawy przewyższająca 200 stron. Co najbardziej istotne, rozprawa stanowi innowacyjny, bardzo znaczący wkład w rozwój analizy dunklowskiej. Przypomnijmy, że jest to tematyka doznająca zastoju (pomimo wysiłków doświadczonych badaczy), w której aktualnie niezwykle trudno dokonać istotnych postępów. Mgr Agnieszce Hejnie się to udaje, w dodatku na niebagatelną skalę! W szczególności przezwycięża trudności związane z nierozstrzygniętymi kwestiami (K1) i (K2), wykonując jednocześnie istotny krok w kierunku ich rozwiązania. W tym sensie dysertacja mgr Hejny jest przełomowa, stanowi znaczący progres zarówno w sensie ilościowym jak i jakościowym. Myślę, że jej waga naukowa bardziej odpowiada wymogom stawianym osiągnięciom habilitacyjnym niż rozprawom doktorskim.

### Podsumowanie

Recenzowana rozprawa doktorska jest wybitna. Wnosi istotny nowatorski wkład do rozwoju analizy dunklowskiej. Badane zagadnienia wymagają zaawansowanej wiedzy, wysoce złożonej analizy i pokonania poważnych trudności. Dysertacja reprezentuje zdecydowanie ponadprzeciętny poziom i z ogromnym naddatkiem spełnia wszelkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim w dyscyplinie Matematyka. W tej sytuacji wnoszę oczywiście o uznanie rozprawy za wyróżniającą. Stwierdzam ponadto, że rozważanie dysertacji mgr Agnieszki Hejny w kategoriach najwyższych nagród, w tym Nagrody Prezesa Rady Ministrów za rozprawę doktorską, miałyby pełne uzasadnienie.



**Prof. dr hab. Adam Nowak**  
Instytut Matematyczny  
Polskiej Akademii Nauk

---

<sup>‡</sup> Tekst rozprawy jest od strony merytorycznej w pełni zrozumiały, jakkolwiek recenzent, nie będąc ekspertem językowym, pomija ocenę strony lingwistycznej.