

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: aktuarialno-finansowa

Wojciech Prokopowicz

Spacery losowe na grafach nieskończonych

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
prof. Dariusza Buraczewskiego

Wrocław 2020

Wstęp

Spacerory losowe to fascynujące zagadnienie nierzadko łączące odległe gałęzie matematyki, informatyki, a nawet fizyki, przy czym w istocie rzeczy jest ono zrozumiałe dla każdego, a przykłady ich zastosowań można znaleźć w najróżniejszych dyscyplinach naukowych. Chociaż zajmiemy się na początku spacerami na grafach skończonych, będziemy to robić wyłącznie z myślą o użyciu nabytej wiedzy do badania spacerów na grafach nieskończonych, które wydają się nieco bardziej enigmatyczne i przez to (według autora) ciekawsze.

Głównym celem tej pracy będzie zapoznanie się i oswojenie z tym zagadnieniem poprzez poszukiwanie odpowiedzi na fundamentalne pytanie o charakter danego spaceru na grafie. Spacerory powracające w pewnym sensie "kręcą się w kółko" odwiedzając po drodze wszystkie wierzchołki grafu, podczas gdy spacerory chwilowe uciekają raczej gdzieś "w nieskończoność".

Teoria obwodów elektrycznych okaże się wyjątkowo mocno powiązana ze spacerami losowymi i pozwoli nam uzyskać dwa najważniejsze kryteria służące określeniu typu spaceru: kryterium Nasha-Williamsa i twierdzenie Lyonsa. Posłużą nam one do udowodnienia twierdzenia Pólyi, które było inspiracją dla wielu prac o spacerach losowych na grafach nieskończonych, w tym i dla tej.

Będziemy się też zastanawiać, jak można modyfikować graf, nie wpływając przy tym na typ spaceru na nim oraz przerobimy trochę przykładów, pośród których będą zarówno pojedyncze szczególne grafy, jak i powszechne klasy grafów. To powinno dać nam całkiem dobre wyczucie co do tego, kiedy dany spacer jest powracający, a kiedy chwilowy.

Czytelnikowi tej pracy powinna wystarczyć podstawowa wiedza z teorii prawdopodobieństwa. Znajomość łańcuchów Markowa może być również przydatna, ale nie jest ona kluczowa dla zrozumienia prezentowanego materiału.

Dwie książki były wyjątkowo istotne dla powstania tej pracy: *Random Walks and Electric Networks* autorstwa Petera Doyle'a i Jamesa Snella oraz *Probability on Trees and Networks* Russella Lyonsa i Yuvala Peresa.

Spis treści

1	Spacerory losowe a sieci elektryczne	4
1.1	Graf i sieć	4
1.2	Spacer losowy na sieci	5
1.3	Sieć elektryczna	6
1.4	Interpretacje probabilistyczne napięcia i przewodnictwo efektywne	7
1.5	Redukcja sieci	9
1.6	Energia	9
1.7	Szacowanie efektywnej rezystancji	10
1.8	Powracalność i chwilowość	12
2	Twierdzenie Pólyi	15
2.1	Dowód twierdzenia	16
2.2	Podejście kombinatoryczne	18
2.3	Quasi izometrie	19
3	Przykłady	23
3.1	Grafiy w przestrzeniach euklidesowych i nie tylko	23
3.2	Drzewa	25
3.3	Płaszczyzna hiperboliczna	27

1 Spacery losowe a sieci elektryczne

W tym rozdziale powiemy, czym są (z punktu widzenia matematyki) sieci elektryczne oraz spacery losowe na tych sieciach. Zostanie wprowadzonych kilka pojęć zaczerpniętych z fizyki, a następnie ustalimy, jaki jest ich związek ze spacerami losowymi. Podążając za intuicją fizyczną otrzymamy wiele wyników przydatnych podczas badania spacerów losowych.

Jako że celem tego rozdziału jest przede wszystkim zrozumienie, w jaki sposób połączone są ze sobą sieci elektryczne i spacery losowe, część bardziej technicznych dowodów zostanie pominięta. Większość z nich można odnaleźć w Rozdziale 2. książki Lyonsa i Peresa [4], na podstawie którego powstał ten rozdział.

1.1 Graf i sieć

Ten podrozdział zawiera konwencje notacyjne i terminologię dotyczącą grafów.

Grafem nazywamy parę uporządkowaną $G = (V, E)$, gdzie V to zbiór **wierzchołków** (oznaczany też $V(G)$), a $E \subseteq V \times V$ to zbiór **krawędzi** (oznaczany też $E(G)$), który nie zawiera elementów postaci (x, x) oraz jeśli $(x, y) \in E$, to $(y, x) \in E$. Dla $(x, y) = e \in E$ mówimy, że x i y są **końcami** krawędzi e oraz piszemy $e^- = x$ i $e^+ = y$, a także $-e = (y, x)$; mówimy też wtedy, że x i y są **sąsiadami**, co oznaczymy: $x \sim y$. Dla dowolnego wierzchołka x definiujemy jego **stopień** następująco: $\deg(x) := |\{e : e^- = x\}|$. Graf nazywamy **lokalnie skończonym**, gdy stopień każdego wierzchołka jest skończony. **Podgrafem** grafu G nazywamy graf, którego zbiór wierzchołków jest podzbiorem $V(G)$, a zbiór krawędzi podzbiorem $E(G)$.

Pojęciem ogólniejszym niż graf jest **multigraf**, czyli para zbiorów V i E wraz z dwoma funkcjami z E w V , konkretnie: $e \mapsto e^-$ oraz $e \mapsto e^+$, przypisującymi krawędziom ich końce. Jeśli dwie krawędzie przyjmują takie same wartości dla obu tych funkcji, to nazywamy je **równoległymi**, a jeśli jakaś krawędź przyjmuje tę samą wartość dla obu funkcji to nazywamy ją **pętlą**.

Ścieżką nazywamy taki ciąg krawędzi, że jeśli e_1 i e_2 są kolejnymi krawędziami, to $e_1^+ = x = e_2^-$ i mówimy, że ta ścieżka **zawiera** lub **przechodzi** przez x . Jeśli $\{e_k\}_{k=1}^n$ jest ścieżką, to mówimy, że **łączy** e_1^- i e_n^+ . Ścieżka jest **prosta**, gdy przechodzi przez każdy wierzchołek co najwyżej raz. Graf jest **spójny**, jeśli dla każdego dwóch różnych wierzchołków istnieje ścieżka je łącząca; minimalną długość takiej ścieżki nazywamy **odległością** x od y , którą oznaczamy przez $d(x, y)$ albo $\text{dist}(x, y)$; $d(x, x) = 0$. Skończona, niepusta ścieżka, która łączy wierzchołek sam ze sobą to **cykl**. Spójny graf bez

cykli to **drzewo**.

Dla podzbioru $K \subset V(G)$ multigraf G/K powstały poprzez **utożsamienie** K do pojedynczego wierzchołka $z \notin V$ to taki multigraf, którego zbiór wierzchołków to $(V \setminus K) \cup \{z\}$, zbiór krawędzi to $E \setminus \{e : e^- \in K, e^+ \in K\}$, a funkcje przypisujące końce krawędziom zamiast końców z K przypisują z . Operacja utożsamienia różnych wierzchołków x i y polega na utożsamieniu zbioru $\{x, y\}$ do pojedynczego wierzchołka.

Sieć to (multi)graf wraz z funkcją $c : E \rightarrow \mathbb{R}$, która krawędzi e przypisuje jej **wagę** $c(e)$ oraz jest symetryczna i dodatnia, tzn. $c(e) = c(-e) > 0$ dla każdej krawędzi e . **Podsieć indukowana** przez $K \subset V(G)$ to sieć złożona z wierzchołków K , wszystkich krawędzi z $E(G)$ o obu końcach z K oraz funkcji wag obciętej do zbioru krawędzi tego podgrafu.

W tej pracy będziemy właściwie rozważać jedynie grafy spójne, lokalnie skończone.

Na koniec omówimy dwa przydatne operatory: d i d^* . Mając funkcję $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy funkcję df zadaną na zbiorze krawędzi w następujący sposób:

$$(df)(e) := f(e^-) - f(e^+).$$

Natomiast dla funkcji $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy funkcję $d^*\theta$ na zbiorze wierzchołków tak:

$$(d^*\theta)(x) := \sum_{e^- = x} \theta(e).$$

1.2 Spacer losowy na sieci

Okazuje się, że istnieje pewna odpowiedniość pomiędzy sieciami o tej własności, że $\sum_{e^- = x} c(e) < \infty$ dla każdego wierzchołka x , a odwracalnymi łańcuchami Markowa, czyli takimi, dla których istnieje dodatnia funkcja π zadaną na przestrzeni stanów tego łańcucha taka, że $\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$ dla dowolnej pary stanów x, y .

Dla odwracalnego łańcucha Markowa definiujemy sieć, której wierzchołkami jest zbiór stanów. Dwa wierzchołki x, y łączymy krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy $p(x, y) > 0$ i przypisujemy tej krawędzi wagę $c(x, y) = \pi(x)p(x, y)$. Zauważmy, że dzięki odwracalności łańcucha mamy $c(x, y) = c(y, x)$.

Z drugiej strony, dla sieci możemy zdefiniować łańcuch Markowa jako spacer losowy po wierzchołkach tej sieci. Definiujemy $\pi(x) := \sum_{e^- = x} c(e)$ oraz $p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)}$, dzięki czemu prawdopodobieństwa przejścia sumują się do 1 dla każdego stanu x , a ponadto funkcja π spełnia warunek odwracalności.

Przez **spacer losowy na sieci** będziemy rozumieć odwracalny łańcuch Markowa uzyskany tą procedurą wraz z funkcją π zdefiniowaną jak powyżej.

Prawdopodobieństwo, że spacer wychodzący z pewnego wierzchołka, nigdy do niego nie powróci nazywamy **prawdopodobieństwem ucieczki** dla tego wierzchołka.

Od teraz rozważamy jedynie spójne sieci. Spacer losowy na takiej sieci jest nieredukowalny, tzn. z każdego wierzchołka spacer przejdzie do dowolnego innego z dodatnim prawdopodobieństwem. Zauważmy, że jeśli prawdopodobieństwo ucieczki dla pewnego wierzchołka jest dodatnie to z nieredukowalności spaceru wynika, że musi być ono dodatnie dla wszystkich wierzchołków. Spacer o tej własności nazywamy **chwilowym**.

Przeciwnie, jeśli dla pewnego (czyli wszystkich) wierzchołka prawdopodobieństwo ucieczki wynosi zero, to taki spacer nazywamy **powracającym**. Zauważmy ponadto, że skoro będzie on wciąż wracał do tego samego wierzchołka, to (z nieredukowalności i lematu Borela-Cantellego) prawie na pewno odwiedzi wszystkie wierzchołki grafu.

Postawieni przed spacerem losowym na sieci, chcielibyśmy poznać jego **typ**, czyli dowiedzieć się, czy jest powracający, czy chwilowy.

1.3 Sieć elektryczna

Głównym zabiegiem w tej pracy jest badanie nie samych spacerów losowych, a sieci oraz wykorzystanie w tym celu wiedzy i intuicji fizycznych dotyczących sieci (obwodów) elektrycznych.

Matematycznie sieć elektryczna to zwykła spójna sieć, tyle że wagi będą od teraz nazywane **przewodnictwami**, a ich odwrotności **rezystancjami** i oznaczane przez r . Do odwołania zajmować się będziemy sieciami skończonymi, jednak większość definicji będzie identyczna dla sieci lokalnie skończonych. Aby powiedzieć coś więcej o takiej sieci, musimy puścić przez nią prąd, czyli podłączyć ją do napięcia.

Ustalmy wierzchołek a , który podłączymy do napięcia (np. do baterii) oraz zbiór wierzchołków Z , który zostanie uziemiony. Nie chcemy przy tym sytuacji, w której istnieją wierzchołki spoza Z , których nie da się połączyć z a ścieżką nie zawierającą wierzchołka z Z , gdyż wtedy taki wierzchołek też byłby de facto uziemiony. W tym momencie w naszym obwodzie ustalają się napięcia (ściśle fizycznie: potencjały) na pozostałych wierzchołkach, zgodnie z Prawem Ohma i Prawem Kirchhoffa.

Niech v będzie funkcją przypisującą każdemu wierzchołkowi ustalone na nim napięcie, a i - funkcją przypisującą każdej krawędzi natężenie prądu przez nią płynącego (lub minus to natężenie, jeśli prąd płynie w przeciwnym kierunku do orientacji krawędzi). Oznaczmy zbiór wszystkich "wewnętrznych" wierzchołków przez $W = V \setminus (\{a\} \cup Z)$.

Prawo Ohma: $v(e^-) - v(e^+) = i(e)r(e)$ dla wszystkich krawędzi e .

Prawo Kirchhoffa: $\sum_{e^- = x} i(e) = 0$ dla wierzchołków $x \in W$.

Te dwa prawa implikują kluczową własność funkcji v :

$$(\forall x \in W) v(x) = \frac{1}{\pi(x)} \sum_{x \sim y} c(x, y)v(y).$$

Wartość funkcji dla każdego wierzchołka wewnętrznego jest średnią ważoną z wartości funkcji dla sąsiadów tego wierzchołka. Funkcję, która posiada taką własność nazywamy **harmoniczną** na W .

Twierdzenie (o funkcji harmoniczej): Dla funkcji $f_0 : \{a\} \cup Z \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje dokładnie jedno jej rozszerzenie do funkcji $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ takiej, że f jest harmoniczną na W .

Napięciem nazywamy zatem tę jedyną funkcję harmoniczną na W o z góry ustalonej wartości $v(a) > 0$ na a i równą 0 na Z . Oznaczając ją będziemy przez v .

Natężeniem natomiast nazywamy funkcję i zadaną na zbiorze krawędzi zgodnie z Prawem Ohma: $i(e) := dv(e) \cdot c(e)$, przy czym na podstawie tej definicji oraz harmonicznego v możemy stwierdzić, że i istotnie spełnia Prawo Kirchhoffa.

Antysymetryczną funkcję $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą $d^*\theta(x) = 0$ dla $x \in W$, $d^*\theta(a) \geq 0$ oraz $d^*\theta(z) \leq 0$ dla $z \in Z$ nazywamy **przepływem** z a do Z . O przepływie myślimy jak o wodzie wpływającej do sieci w a i wypływającej w Z . Całkowita ilość (wody) wpływająca do sieci jest nazywana **siłą** przepływu i oznaczana: $Strength(\theta) := d^*\theta(a)$. Przepływ o sile równej 1 nazywamy **przepływem jednostkowym**.

Natężenie jest przepływem. W podrozdziale o energii dowiemy się, że dość szczególnym.

1.4 Interpretacje probabilistyczne napięcia i przewodnictwo efektywne

Z tak opisaną siecią elektryczną możemy powrócić do zagadnienia spacerów losowych. Niech τ_a i τ_Z będą zmiennymi losowymi oznaczającymi pierwszy moment, kiedy nasz spacer losowy odwiedza wierzchołek a lub odpowiednio wierzchołek $z \in Z$. $\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_Z)$ oznacza wtedy prawdopodobieństwo, że spacer losowy startujący z x odwiedzi wierzchołek a przed jakimkolwiek wierzchołkiem z Z .

Zauważmy teraz, że to prawdopodobieństwo wynosi 1 dla $x = a$ oraz 0 dla $x \in Z$, ponadto jeśli rozważyć je jako funkcję od x , to prosta analiza pierwszego kroku da nam, że jest ona harmoniczna na W . Jednak $\frac{v(x)}{v(a)}$ też jest funkcją harmoniczną na W i przyjmuje te same wartości na $V \setminus W$, zatem na mocy twierdzenia o funkcji harmoniczej:

$$\mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_Z) = \frac{v(x)}{v(a)}.$$

Oznaczmy przez $\mathbb{P}(a \rightarrow Z)$ prawdopodobieństwo zdarzenia, że spacer startujący z a odwiedzi wierzchołek z Z zanim powróci do a . Teoria sieci elektrycznych będzie służyła temu, aby odpowiednio oszacować tę wielkość. Poprzez analizę pierwszego kroku mamy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \rightarrow Z) &= \sum_{x \sim a} p(a, x) [1 - \mathbb{P}_x(\tau_a < \tau_Z)] = \sum_{x \sim a} \frac{c(a, x)}{\pi(a)} \left[1 - \frac{v(x)}{v(a)}\right] = \\ &= \frac{1}{v(a)\pi(a)} \sum_{x \sim a} c(a, x) [v(a) - v(x)] = \frac{1}{v(a)\pi(a)} \sum_{x \sim a} i(a, x). \end{aligned}$$

Wprowadzimy teraz kolejne pojęcie zaczerpnięte z fizyki, które w przyszłości okaże się bardzo użyteczne. Pomyślmy, że całą sieć chcemy zastąpić pojedynczym przewodnikiem, zachowując przy tym wyjściowe napięcie i siłę natężenia. Przewodnictwo takiego pojedynczego przewodnika nazywamy **przewodnictwem efektywnym** sieci, a jego odwrotność **rezystancją efektywną**:

$$\frac{1}{R_{eff}} := C_{eff} := \frac{Strength(i)}{v(a)} = \pi(a)\mathbb{P}(a \rightarrow Z).$$

Do tej pory nie wybraliśmy konkretnej wysokości napięcia źródłowego. Pierwszym odruchem mogłoby być ustalenie $v(a) = 1$, ale praktyczniejsze okazuje się wybranie takiego napięcia $v(a)$, dla którego natężenie będzie przepływem jednostkowym.

Niech v_1, i_1 będą funkcjami napięcia i natężenia takimi, że $v_1(a) = 1$. Wtedy $v(x) = \frac{1}{Strength(i_1)} v_1(x)$ jest funkcją harmoniczną na W równą 0 na Z , czyli jest napięciem. Ponadto natężenie jakie definiuje v jest przepływem jednostkowym. Od tej pory będzie to nasza domyślna funkcja napięcia.

Niech $\mathcal{G}_Z(a, x)$ będzie oczekiwaną liczbą odwiedzin wierzchołka x przed odwiedzeniem po raz pierwszy wierzchołka z Z przez spacer losowy startujący z a . Wtedy $\mathcal{G}_Z(a, z) = 0$ dla $z \in Z$, a $\mathcal{G}_Z(a, a)$ jest wartością oczekiwaną zmiennej losowej o rozkładzie geometrycznym z prawdopodobieństwem sukcesu $\mathbb{P}(a \rightarrow Z)$, czyli $\mathcal{G}_Z(a, a) = \mathbb{P}(a \rightarrow Z)^{-1} = v(a)\pi(a)$.

Fakt: $\pi(x) \mathcal{G}_Z(x, y) = \pi(y) \mathcal{G}_Z(y, x)$.

Stosując analizę pierwszego kroku uzyskujemy, że funkcja $\frac{1}{\pi(a)} \mathcal{G}_Z(x, a)$ jest harmoniczna na W . Na mocy powyższego faktu oraz twierdzenia o funkcji harmonicznej mamy:

$$\frac{\mathcal{G}_Z(a, x)}{\pi(x)} = v(x).$$

1.5 Redukcja sieci

Przewodnictwo efektywne, zdefiniowane w poprzednim podrozdziale, jest pomocne, ponieważ możemy je w łatwy sposób obliczyć za pomocą wielu prostych przekształceń sieci.

Reguła połączenia szeregowego: Załóżmy, że wierzchołek $w \in W(G)$ ma dokładnie dwóch sąsiadów: u_1, u_2 . Niech $G \setminus \{w\}$ będzie siecią bez w , jak i bez krawędzi zawierających w , za to z krawędziami łączącymi u_1 i u_2 . Jeśli ustalimy $r(u_1, u_2) = r(u_1, w) + r(w, u_2)$, a pozostałe rezystancje nie zostaną zmienione, to $G \setminus \{w\}$ ma takie same napięcia na wierzchołkach, co sieć wyjściowa, a $i(u_1, u_2) = i(u_1, w)$. W szczególności wartość C_{eff} się nie zmieniła.

Reguła połączenia równoległego: Załóżmy, że krawędzie e_1, e_2 są równoległe. Jeśli zastąpimy je pojedynczą krawędzią o przewodnictwie równym $c(e_1) + c(e_2)$, to napięcia w sieci nie zmienią się, a natężenie na tej nowej krawędzi wyniesie $i(e_1) + i(e_2)$. W szczególności wartość C_{eff} nie zmieni się.

Aby przekonać się, że te reguły są prawdziwe, wystarczy sprawdzić, że Prawo Ohma i Prawo Kirchhoffa zachodzą dla postulowanych napięć i natężeń.

Innym sprytnym sposobem na redukcję sieci jest zauważenie (np. poprzez symetrię sieci), że napięcia na dwóch wierzchołkach są takie same. Możemy wtedy usunąć krawędź łączącą te wierzchołki bez wpływu na resztę sieci, gdyż przez taką krawędź nie płynie prąd (natężenie wynosi zero). Idąc dalej, możemy utożsamić te wierzchołki, a Prawa Ohma i Kirchhoffa będą nadal zachodzić.

1.6 Energia

Pojęciem, które ostatecznie pozwoli nam połączyć zagadnienia sieci elektrycznych i spacerów losowych jest energia. Dla dowolnej funkcji antysyme-

trycznej $\theta : E \rightarrow \mathbb{R}$ przez jej **energię** rozumiemy:

$$\mathcal{E}(\theta) := \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \theta(e)^2 r(e).$$

Zauważmy, że zamiast dzielić sumę przez dwa, możemy równie dobrze sumować tylko po jednej krawędzi z pary $e, -e$, gdyż $\theta(e)^2 r(e) = \theta(-e)^2 r(-e)$.

Dla funkcji f, g zadanych na wierzchołkach definiujemy iloczyn skalarny następująco:

$$(f, g) := \sum_{x \in V} f(x)g(x).$$

Natomiast dla funkcji antysymetrycznych θ, θ' zadanych na krawędziach definiujemy iloczyn skalarny tak:

$$(\theta, \theta') := \frac{1}{2} \sum_{e \in E} \theta(e)\theta'(e).$$

Fakt: Operatory d i d^* są sprzężone, tzn. $(\theta, df) = (d^*\theta, f)$.

Lemat (o przepływie): Jeśli θ jest przepływem z a do Z , to:

$$Strength(\theta) = d^*\theta(a) = - \sum_{z \in Z} d^*\theta(z).$$

Lemat (o zachowaniu energii): Jeśli θ jest przepływem z a do Z , a $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją taką, że $f \upharpoonright Z \equiv \zeta$, to:

$$(\theta, df) = Strength(\theta) \cdot (f(a) - \zeta).$$

Na mocy definicji i , powyższego lematu oraz definicji R_{eff} mamy:

$$\mathcal{E}(i) = (i, dv) = v(a) = R_{eff}.$$

Zasada Thomsona: Niech θ będzie przepływem z a do Z takim, że $d^*\theta = d^*i$. Wtedy $\mathcal{E}(\theta) \geq \mathcal{E}(i)$, chyba że $\theta = i$.

Otrzymaliśmy zatem, że natężenie jest tym szczególnym przepływem, który minimalizuje energię.

1.7 Szacowanie efektywnej rezystancji

Sieci mogą być bardzo skomplikowane i nie zawsze potrafimy obliczyć efektywną rezystancję. Na szczęście konkretna wartość nie będzie dla nas tak istotna, jak znalezienie odpowiedniego oszacowania.

Zasada monotoniczności Rayleigha: Rozważmy dwa alternatywne przyporządkowania rezystancji krawędziom: r, r' . Jeśli $r \leq r'$, to $R_{eff}^{(r)} \leq R_{eff}^{(r')}$.

Dowód: Jako, że napięcia na uziemionych wierzchołkach są takie same, możemy utożsamić Z do pojedynczego wierzchołka z bez wpływu na rezystancję efektywną. Mamy wtedy $d^*i^{(r)} = d^*i^{(r')}$, zatem z definicji energii i Zasady Thomsona:

$$\mathcal{E}(i^{(r')}) \geq \frac{1}{2} \sum_e i^{(r')}(e)^2 r(e) \geq \mathcal{E}(i^{(r)}). \square$$

Wniosek: Jeśli $c \leq c'$, to $C_{eff}^{(c)} \leq C_{eff}^{(c')}$.

W szczególności usunięcie krawędzi z sieci jest jak zmniejszenie jej przewodnictwa do zera, a zatem taka operacja może jedynie zmniejszyć efektywne przewodnictwo sieci. Podobnie utożsamienie dwóch wierzchołków można traktować jako zmniejszenie oporu między nimi do zera, a więc tym razem to efektywna rezystancja się zmniejsza.

Do zapisania kolejnego twierdzenia potrzebna będzie definicja. Mówimy, że zbiór krawędzi Π **oddziela** a od Z , jeśli każda ścieżka zaczynająca się w a i łącząca a z wierzchołkiem z Z zawiera krawędź z Π . Ponadto zbiory krawędzi Π_1 i Π_2 nazywamy **całkowicie rozłącznymi**, gdy zachodzi warunek: $e \in \Pi_1 \Rightarrow e \notin \Pi_2 \wedge -e \notin \Pi_2$.

Nierówność Nasha-Williamsa: Niech Π_1, \dots, Π_n będą parami całkowicie rozłącznymi zbiorami oddzielającymi a od Z . Wtedy:

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{e \in \Pi_k} c(e) \right)^{-1} \leq R_{eff}.$$

Dowód: Niech Z_k będzie zbiorem tych końców krawędzi z Π_k , od których a jest oddzielone przez Π_k , a K zbiorem wszystkich wierzchołków, od których a nie jest oddzielone przez Π_k . Niech sieć H będzie siecią indukowaną przez $K \cup Z_k$. $i_H := i \upharpoonright E(H)$ jest przepływem jednostkowym z a do Z_k , bo usunięte krawędzie były połączone jedynie z wierzchołkami z Z_k (inaczej przeczyłoby to definicji K i Z_k). Lemat o przepływie daje nam:

$$1 = - \sum_{x \in Z_k} d^*i_H(x) = - \sum_{x \in Z_k} \sum_{e^- = x} i_H(e) = - \sum_{e \in E(H), e^- \in Z_k} i(e).$$

Jeśli jednak krawędź $e \in E(H)$ i $e^- \in Z_k$, to albo $e^+ \in K$, a wtedy $-e$ musi należeć do Π_k albo $e^+ \in Z_k$, ale wówczas w sumie mamy zarówno $i(e)$ jak i $i(-e) = -i(e)$. Możemy zatem napisać:

$$1 = \left| \sum_{e \in E(H), e^- \in Z_k} i(e) \right| = \left| \sum_{e \in E(H), e^- \in Z_k, -e \in \Pi_k} i(e) \right| = \left| \sum_{e \in \Pi'_k} i(e) \right| \leq \sum_{e \in \Pi'_k} |i(e)|,$$

gdzie Π'_k jest pewnym podzbiorem Π_k , który nie zawiera żadnej pary przeciwnych krawędzi. Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$\sum_{e \in \Pi'_k} i(e)^2 r(e) \sum_{e \in \Pi'_k} c(e) \geq \left(\sum_{e \in \Pi'_k} |i(e)| \right)^2 \geq 1 \Rightarrow \sum_{e \in \Pi'_k} i(e)^2 r(e) \geq \left(\sum_{e \in \Pi_k} c(e) \right)^{-1}.$$

Sumujemy obustronnie po $1 \leq k \leq n$ (zbiory Π'_k są całkowicie rozłączne) i otrzymujemy dolne oszacowanie dla $\mathcal{E}(i) = R_{eff}$. \square

Gdyby założyć, że dla każdego k zbiór Π_k oddziela Π_{k-1} i Π_{k+1} , to można by pomyśleć o bardziej intuicyjnym dowodzie. Mianowicie, dla każdego k utożsamimy wszystkie wierzchołki między Π_k a Π_{k+1} do pojedynczego wierzchołka u_k (zmniejszając opór między nimi do 0). Wtedy jedynie równoległe krawędzie z Π_k łączą u_{k-1} z u_k . Stosując kolejno regułę połączenia równoległego, a potem szeregowego otrzymujemy dolne ograniczenie na rezystancję efektywną oryginalnej sieci.

1.8 Powracalność i chwilowość

W końcu jesteśmy gotowi, aby użyć zdobytej wiedzy o spacerach losowych na skończonych grafach do badania typów spacerów na grafach nieskończonych. Rozważmy sieć złożoną ze spójnego, lokalnie skończonego grafu G o nieskończenie wielu wierzchołkach i funkcji wag c . Wyróżnimy wierzchołek a . Na tej sieci rozważamy spacer losowy zdefiniowany jako odwracalny łańcuch Markowa tak jak poprzednio.

Niech ciąg skończonych podzbiorów $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V$ spełnia: $\bigcup_n V_n = V$ oraz $(\forall n) a \in V_n$. Wtedy mówimy, że ciąg $\{G_n\}$, gdzie G_n jest podsiecią indukowaną przez V_n , **wyczerpuje** G . Niech $Z_n = V(G) \setminus V(G_n)$ i niech G_n^W będzie siecią uzyskaną z G poprzez utożsamienie Z_n do pojedynczego wierzchołka z_n , który zostaje uziemiony.

Wróćmy do spaceru losowego na G . Zdarzenia $\{a \rightarrow Z_n\}$ są malejące, a ich przekrój to zdarzenie, że spacer startujący z a nigdy nie powróci do punktu wyjścia. Będziemy to zdarzenie oznaczać przez $\{a \rightarrow \infty\}$. Możemy zatem zdefiniować przewodnictwo efektywne dla sieci nieskończonej:

$\pi(a)\mathbb{P}(a \rightarrow \infty) = \pi(a) \lim_n \mathbb{P}(a \rightarrow Z_n) = \lim_n C_{eff}(G_n^W) =: C_{eff}(G) = C_{eff}$. Rezystancja efektywna to odwrotność C_{eff} , przy czym gdy ta jest równa 0, to rezystancja wynosi ∞ . $\mathbb{P}(a \rightarrow \infty)$ to prawdopodobieństwo uciezki i jest ono niezerowe wtedy i tylko wtedy, gdy spacer jest chwilowy. Stąd wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie (chwilowość i przewodnictwo efektywne): Spacer losowy na nieskończonej, spójnej sieci jest chwilowy wtedy i tylko wtedy, gdy przewodnictwo efektywne tej sieci jest dodatnie (rezystancja efektywna jest skończona).

Z tego twierdzenia i zasady Rayleigha dla sieci skończonych otrzymujemy natychmiastowo wniosek:

Zasada monotoniczności Rayleigha: Rozważmy dwa alternatywne przyporządkowania przewodnictw krawędziom: c, c' . Jeśli $c \leq c'$ i spacer losowy na sieci (G, c) jest chwilowy, to spacer losowy na (G, c') też jest chwilowy.

Mówimy, że zbiór krawędzi Π oddziela a od ∞ , jeśli każda nieskończona, prosta ścieżka zaczynająca się w a zawiera krawędź z Π .

Kryterium Nasha-Williamsa: Dla ciągu $\{\Pi_n\}$ skończonych i parami całkowicie rozłącznych zbiorów, z których każdy oddziela a od ∞ mamy:

$$\sum_n \left(\sum_{e \in \Pi_n} c(e) \right)^{-1} \leq R_{eff},$$

zatem jeśli ta suma jest nieskończona, to spacer losowy na (G, c) jest powracający.

Dowód: Niech $\{G_n\}$ będzie ciągiem wyczerpującym G takim, że $\bigcup_{k=1}^n \Pi_k \subseteq E(G_n)$. Mamy $R_{eff} = \lim_n R_{eff}(G_n^W)$, zatem stosując nierówność Nasha-Williamsa dla każdego G_n^W , dostajemy tezę. \square

Antysymetryczną funkcję θ zadaną na zbiorze krawędzi nazywamy przepływem z a do ∞ , jeśli: $d^*\theta(a) > 0$ i $d^*\theta(x) = 0$ dla $x \neq a$. Gdy $d^*\theta(a) = 1$ przepływ nazywamy jednostkowym.

Lemat (o zbieżności przepływów): Niech $\{\theta_n\}$ będzie takim ciągiem, że θ_n jest przepływem jednostkowym z a do Z_n , gdzie $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq \bigcap_n Z_n =$

\emptyset . Niech ponadto: $(\forall e) \theta_n(e) \rightarrow \theta(e)$ oraz $(\forall n) \mathcal{E}(\theta_n) \leq M < \infty$. Wtedy θ jest przepływem jednostkowym z a do ∞ oraz $\mathcal{E}(\theta) \leq \liminf_n \mathcal{E}(\theta_n) \leq M$.

Dowód: $\theta(-e) = \lim_n \theta_n(-e) = -\lim_n \theta_n(e) = -\theta(e)$, czyli θ jest antysymetryczna. G jest lokalnie skończony, zatem: $d^*\theta(x) = \lim_n d^*\theta_n(x) = \mathbb{1}_{\{a\}}(x)$, czyli θ jest przepływem jednostkowym z a do ∞ . Natomiast nierówność $\mathcal{E}(\theta) \leq \liminf_n \mathcal{E}(\theta_n)$ wynika z lematu Fatou dla $f_n = \theta_n^2 \cdot r \geq 0$. \square

Twierdzenie (Lyons): Spacer losowy na G jest chwilowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przepływ jednostkowy na G o skończonej energii z jakiegoś (każdego) wierzchołka do ∞ .

Dowód: (\Leftarrow) Niech θ będzie przepływem jednostkowym o skończonej energii z a do ∞ . Niech $\{G_n\}$ będzie ciągiem wyczerpującym G . Przez i_n oznaczymy natężenie jednostkowe (z a do z_n) na G_n^W . Przez $\theta \upharpoonright G_n^W$ rozumiemy przepływ jednostkowy na G_n^W z a do z_n naturalnie indukowany przez θ . Na mocy zasady Thomsona: $R_{eff}(G_n^W) = \mathcal{E}(i_n) \leq \mathcal{E}(\theta \upharpoonright G_n^W) \leq \mathcal{E}(\theta) < \infty$. Stąd $R_{eff} = \lim_n R_{eff}(G_n^W) \leq \mathcal{E}(\theta) < \infty$.

(\Rightarrow) Weźmy dowolny wierzchołek a . Niech $\{G_n\}, i_n$ oznaczają to samo, co poprzednio, a v_n będzie napięciem odpowiadającym i_n . Skoro spacer losowy na G jest chwilowy, to ciąg $\mathcal{E}(i_n)$ jest zbieżny do $R_{eff} < \infty$, a zatem jest ograniczony przez pewną skończoną stałą M . Rozważmy spacer losowy na G startujący z a . Niech $Y_n(x)$ będzie zmienną losową zliczającą wizyty tego spaceru w x zanim spacer odwiedzi wierzchołek z $Z_n = V(G) \setminus V(G_n)$, natomiast $Y(x)$ - zliczającą wszystkie wizyty tego spaceru w x . Korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej oraz interpretacji probabilistycznej napięcia z podrozdziału 1.4 mamy: $\mathbb{E}[Y(x)] = \lim_n \mathbb{E}[Y_n(x)] = \lim_n \mathcal{G}_{Z_n}(a, x) = \pi(x) \lim_n v_n(x)$. Ale ten spacer jest chwilowy, zatem $\mathbb{E}[Y(x)] < \infty$, czyli możemy zdefiniować: $v(x) := \lim_n v_n(x)$. Stąd wiemy, że $i(e) := \lim_n i_n(e) = \lim_n c(e) dv_n(e) = c(e) dv(e)$ istnieje dla każdej krawędzi e . Na mocy lematu o zbieżności przepływów i jest przepływem jednostkowym z a do ∞ o skończonej energii. \blacksquare

Możemy teraz przenieść resztę pojęć dotyczących sieci elektrycznych na sieci nieskończone.

Wniosek: Niech G będzie taką siecią, że spacer losowy na niej jest chwilowy. Niech $\{G_n\}$ wyczerpuje G . Przez i_n oznaczymy natężenie jednostkowe (z a do z_n) na G_n^W , a przez v_n odpowiadające mu napięcie. Wtedy $\{i_n\}$ ma punktową granicę i na G , która jest jedynym jednostkowym przepływem na

G o minimalnej energii. Ponadto $\{v_n\}$ ma punktową granicę v na G , która ma następujące własności: $dv = ir$, $v(a) = \mathcal{E}(i) = R_{eff}(G)$, $\frac{v(x)}{v(a)} = \mathbb{P}_x(\tau_a < \infty)$ oraz $\mathcal{G}(a, x) = \pi(x)v(x)$, gdzie $\mathcal{G}(a, x)$ jest oczekiwaną liczbą odwiedzin x przez spacer losowy startujący z a .

Dowód: Z dowodu twierdzenia mamy, że i i v istnieją oraz, że $dv = ir$ i $\mathcal{G}(a, x) = \pi(x)v(x)$. Proste użycie ciągłości prawdopodobieństwa daje nam: $\frac{v(x)}{v(a)} = \mathbb{P}_x(\tau_a < \infty)$. Dalej $v(a) = \lim_n v_n(a) = \lim_n \mathcal{E}(i_n) = \lim_n R_{eff}(G_n^W) = R_{eff}$. Z lematu o zbieżności przepływów: $\mathcal{E}(i) \leq \liminf_n \mathcal{E}(i_n)$, ale z dowodu twierdzenia mamy: $\mathcal{E}(i_n) \leq \mathcal{E}(\theta)$ dla dowolnego przepływu jednostkowego θ z a do ∞ , w szczególności: $\mathcal{E}(i_n) \leq \mathcal{E}(i)$, zatem $\mathcal{E}(i) = \lim_n \mathcal{E}(i_n) = v(a)$. Przy okazji $\mathcal{E}(i) \leq \mathcal{E}(\theta)$, czyli i ma minimalną energię. Pozostaje pokazać, że i jest jedyna.

Dla dowolnych θ, θ' mamy:

$$\frac{\mathcal{E}(\theta) + \mathcal{E}(\theta')}{2} = \mathcal{E}\left(\frac{\theta + \theta'}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right),$$

zatem jeśli θ i θ' są przepływami jednostkowymi z a do ∞ o minimalnej energii, to $\frac{1}{2}(\theta + \theta')$ również nim jest, a $\mathcal{E}\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) = 0 \Rightarrow \theta = \theta'$. \square

Ma sens zatem nazywanie v napięciem, a i jednostkowym natężeniem na sieci G uziemionej w nieskończoności.

2 Twierdzenie Pólyi

To piękne twierdzenie udowodnione w 1921 roku przez węgierskiego matematyka George'a Pólyę jest kluczowe dla tej pracy, ponieważ daje podstawową intuicję dotyczącą tego, jaka jest różnica pomiędzy grafami powracającymi a chwilowymi.

Spacer losowy na sieci (G, c) nazywamy **prostym**, gdy $c \equiv C$, gdzie C jest dodatnią stałą. Taki spacer będąc w wierzchołku x przechodzi do dowolnego z sąsiadów z prawdopodobieństwem $\frac{1}{deg(x)}$, dlatego zazwyczaj przez **(prosty) spacer losowy na grafie G** rozumiemy spacer losowy na (G, c) , gdzie $c \equiv 1$.

Łatwo zauważyć, że na mocy zasady monotoniczności Rayleigha, jeśli c jest ograniczona z dołu i z góry przez dodatnie stałe, to spacer losowy na (G, c) jest tego samego typu, co prosty spacer losowy na G .

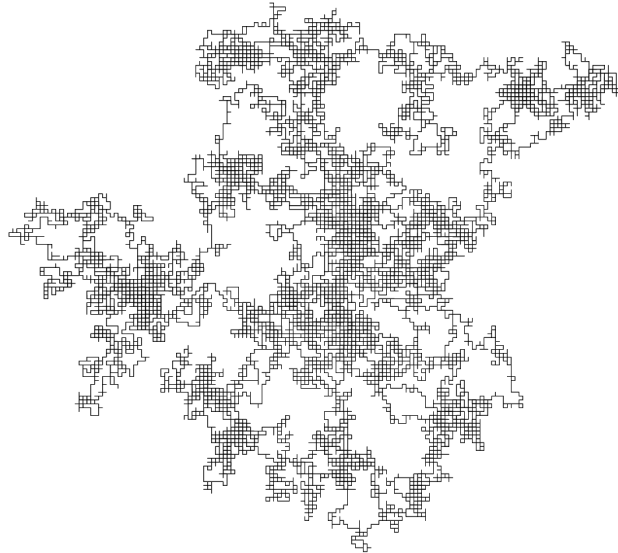
Przez **kratę** \mathbb{Z}^d rozumiemy graf, dla którego $V(G) = \mathbb{Z}^d$, natomiast dwa wierzchołki są połączone krawędzią dokładnie wtedy, gdy są w euklidesowej odległości 1 od siebie, tzn. różnią się jedynie o kanoniczny wektor e_i .

Twierdzenie (Pólya): Prosty spacer losowy na kracie \mathbb{Z}^d jest:

- powracający, gdy $d \leq 2$,
- chwilowy, gdy $d \geq 3$.

2.1 Dowód twierdzenia

Dowód dla $d = 2$: Użyjemy kryterium Nasha-Williamsa dla $a = (0, 0)$. Niech K_n będzie brzegiem kwadratu $[-n, n]^2$ i niech Π_n będzie zbiorem krawędzi łączących K_n z K_{n+1} . Wtedy Π_n jest zbiorem oddzielającym a od ∞ oraz $|\Pi_n| = 4(2n + 1) = 8n + 4$. Mamy zatem $R_{eff} \geq \sum_n \frac{1}{8n+4} = \infty$. \square



Przykładowa obserwacja prostego spaceru losowego na kracie \mathbb{Z}^2 - 25 tysięcy kroków

Z dowodu wynika również, że prawdopodobieństwo tego, iż spacer startujący w $(0, 0)$ opuści K_n przed powrotem do punktu wyjścia jest szacowane z góry przez $C_1 \log(n)^{-1}$ dla pewnej stałej C_1 .

Oczywiście przypadek $d = 2$ daje nam natychmiast powracalność prostego spaceru losowego dla $d = 1$ (dzięki zasadzie monotoniczności Rayleigha). Podobnie do udowodnienia drugiej części twierdzenia wystarczy pokazać przypadek $d = 3$. Zaprezentujemy prosty dowód Doyle'a i Snella [1].

Dowód dla $d = 3$: Skorzystamy z twierdzenia Lyonsa. Zdefiniujemy przepływ θ z $a = (0, 0, 0)$ do ∞ na części kraty \mathbb{Z}^3 pomiędzy dodatnimi półosiąmi

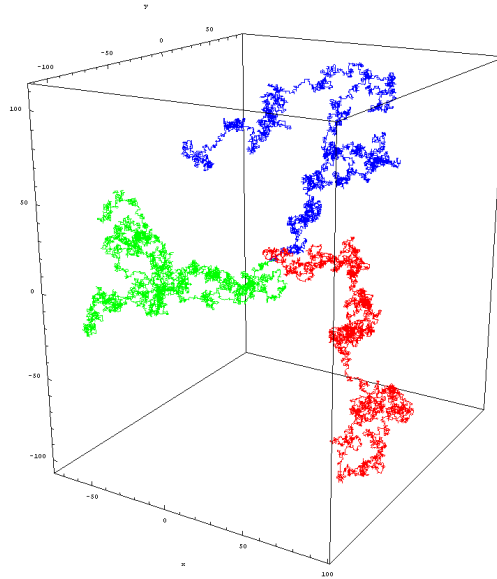
w następujący sposób: dla (x, y, z) odległego o n od a niech:

$$\theta\left(\langle(x, y, x), (x, y + 1, z)\rangle\right) = \frac{2(y + 1)}{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}$$

i podobnie dla x oraz z . Mamy: $n = \text{dist}(a, (x, y, z)) = |x| + |y| + |z| = x + y + z$, czyli z (x, y, z) wypływa łącznie $\frac{2}{(n+1)(n+2)}$. Natomiast do (x, y, z) wpływa z punktów $(x - 1, y, z)$, $(x, y - 1, z)$, $(x, y, z - 1)$ razem:

$$\frac{2x}{n(n + 1)(n + 2)} + \frac{2y}{n(n + 1)(n + 2)} + \frac{2z}{n(n + 1)(n + 2)} = \frac{2}{(n + 1)(n + 2)},$$

zatem θ jest dobrze zdefiniowanym przepływem. Oczywiście tylko do a nic nie wpływa, za to wpływa zeń $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, czyli θ jest przepływem jednostkowym.



Trzy obserwacje prostego spaceru losowego na kracie \mathbb{Z}^3 - 10 tysięcy kroków każda

Zastanówmy się, ile jest punktów oddalonych o n od a . Szukamy takich liczb $x, y, z \geq 0$, że $x + y + z = n$. Weźmy dowolne $0 \leq x \leq n$. Wtedy y może być dowolną liczbą między 0 a $n - x$. Na koniec $z = n - x - y$. Takich trójek mamy zatem:

$$\sum_{x=0}^n (n - x + 1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Z każdego punktu oddalonego o n od a wychodzą trzy krawędzie o dodatnim przepływie wynoszącym maksymalnie $\frac{2}{(n+2)(n+3)}$ każdy. Mamy zatem:

$$\mathcal{E}(\theta) \leq \sum_n \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot 3 \left(\frac{2}{(n+2)(n+3)} \right)^2 \leq \sum_n \frac{6}{(n+2)^2} < \infty. \blacksquare$$

2.2 Podejście kombinatoryczne

W tym podrozdziale zaprezentujemy, jak dowodzi się twierdzenia Pólyi bez użycia sieci elektrycznych. Takie podejście można znaleźć w klasycznych podręcznikach z teorii prawdopodobieństwa, np. u Lawlera [2] [3].

Rozważmy dowolny spacer losowy na spójnej sieci. Przez a będziemy oznaczać punkt wyjścia tego spaceru, natomiast przez S_n jego pozycję po n krokach. Niech Z zlicza wszystkie wizyty spaceru w a . Z twierdzenia Fubiego mamy:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n=a\}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = a).$$

Dalej, jeśli spacer jest powracający, to Z wynosi nieskończoność z prawdopodobieństwem 1, a zatem $E[Z] = \infty$.

Z drugiej strony, jeśli spacer jest chwilowy, to prawdopodobieństwo ucieczki jest większe od 0. Niech $q = 1 - \mathbb{P}(a \rightarrow \infty) < 1$ oznacza prawdopodobieństwo powrotu do a . Wtedy Z ma rozkład geometryczny z prawdopodobieństwem sukcesu q i porażki $1 - q$, to znaczy $\mathbb{P}(Z = k) = q^{k-1}(1 - q)$ dla $k \geq 1$ oraz:

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}(1 - q) = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{\mathbb{P}(a \rightarrow \infty)} < \infty.$$

Fakt: Spacer losowy na spójnym grafie jest powracający wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = a) = \infty.$$

Wracając do prostego spaceru losowego na kracie \mathbb{Z}^d zauważmy, że możemy przedstawić S_n jako sumę niezależnych decyzji X_1, X_2, \dots o jednakowym rozkładzie: $\mathbb{P}(X_1 = \pm e_j) = \frac{1}{2d}$, $1 \leq j \leq d$. Wtedy:

$$\mathbb{E}[|S_n|^2] = \mathbb{E} \left[\sum_{i,j=1}^n \langle X_i, X_j \rangle \right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|X_i|^2] + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[\langle X_i, X_j \rangle] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[1] + \sum_{i \neq j} \langle \mathbb{E}[X_i], \mathbb{E}[X_j] \rangle = n.$$

Możemy zatem przypuszczać, że średnia odległość spaceru od \emptyset jest rzędu $c_1\sqrt{n}$. Idąc dalej, w \mathbb{Z}^d mamy około $c_2\sqrt{n}^d$ punktów, których odległość od \emptyset jest co najwyżej rzędu \sqrt{n} , czyli można zgadywać, iż prawdopodobieństwo znalezienia się dokładnie w jednym z tych punktów (np. w \emptyset) jest rzędu $\frac{c_3}{\sqrt{n}^d} = c_3 n^{-\frac{d}{2}}$.

Jest to oczywiście jedynie intuicyjne rozumowanie, można jednak naprawdę pokazać, poprzez nie bardzo skomplikowane, lecz żmudne rachunkowo rozważania kombinatoryczne, że prawdopodobieństwo znalezienia się po n krokach w \emptyset jest asymptotycznie równe $c_3 n^{-\frac{d}{2}}$ (patrz [1] podrozdział 2.3). Wtedy z powyższego faktu wynika twierdzenie Pólyi.

2.3 Quasi izometrie

W tym podrozdziale poznamy dwa rodzaje odwzorowań, które w pewnym sensie zachowują typ spaceru losowego. Wówczas twierdzenie Pólyi okaże się stosunkowo łatwym wnioskiem z tej bardzo efektywnej teorii.

Dla dwóch sieci G i G' funkcję ϕ przekształcającą wierzchołki G na wierzchołki G' nazywamy **włożeniem zgrubnie izometrycznym** lub po prostu włożeniem zgrubnym, gdy istnieją stałe $\alpha, \beta < \infty$ oraz funkcja Φ zdefiniowana na krawędziach G taka, że:

- dla każdej krawędzi $\langle x, y \rangle$, $\Phi(\langle x, y \rangle)$ jest prostą ścieżką z $\phi(x)$ do $\phi(y)$ oraz

$$\sum_{e' \in \Phi(\langle x, y \rangle)} r'(e') \leq \alpha r(x, y),$$

a $\Phi(\langle y, x \rangle)$ jest ścieżką odwrotną do $\Phi(\langle x, y \rangle)$;

- dla każdej krawędzi $e' \in G'$ istnieje nie więcej niż β krawędzi w G , których obraz przez Φ zawiera e' .

Dwie sieci nazywamy **zgrubnie równoważnymi**, jeśli istnieją włożenia zgrubne w obu kierunkach. Na przykład, można pokazać, że każde dwa (dostatecznie regularne) parkietaże \mathbb{R}^2 zadają sieci zgrubnie równoważne. Powróćmy do tego później.

Twierdzenie (Kanai): Niech G i G' będą spójnymi sieciami. Jeśli istnieje włożenie zgrubne G w G' i spacer losowy na G jest chwilowy, to spacer losowy na G' też jest chwilowy.

Dowód: Skorzystamy z twierdzenia Lyonsa. Niech ϕ (wraz z α, β, Φ) będzie włożeniem zgrubnym G w G' . Z założenia istnieje przepływ jednostkowy na G o skończonej energii z a do nieskończoności. Nazwijmy go θ . Zdefiniujmy funkcję $\theta'(e') = \sum_{e' \in \Phi(e)} \theta(e)$ zadaną na krawędziach G' (sumujemy po wszystkich krawędziach G rozróżniając e i $-e$). Pokażemy, że θ' jest przepływem jednostkowym z $\phi(a)$ do nieskończoności.

Z pierwszego punktu definicji ϕ mamy, że $e' \in \Phi(e) \Leftrightarrow -e' \in \Phi(-e)$, zatem:

$$\theta'(-e') = \sum_{-e' \in \Phi(e)} \theta(e) = \sum_{e' \in \Phi(-e)} \theta(e) = - \sum_{e' \in \Phi(-e)} \theta(-e) = -\theta'(e'),$$

czyli θ' jest antysymetryczna.

Dalej mamy:

$$\begin{aligned} \sum_{\phi(x)=x'} d^* \theta(x) &= \sum_{\phi(x)=x'} \sum_{e^- = x} \theta(e) = \sum_{\phi(e^-)=x'} \theta(e) \stackrel{(*)}{=} \\ &= \sum_{(e')^- = x'} \sum_{e' \in \Phi(e)} \theta(e) = \sum_{(e')^- = x'} \theta'(e') = d^* \theta'(x'). \end{aligned}$$

Wystarczy zatem pokazać (*), gdyż wtedy $d^* \theta'(x') = \sum_{\phi(x)=x'} \mathbb{1}_{\{a\}}(x) = \mathbb{1}_{\{\phi(a)\}}(x')$. Oczywiście, jeżeli krawędź e spełnia $\phi(e^-) = x'$, to $e \in A := \{e : (\exists e' \in \Phi(e))(e')^- = x'\}$, bo $\Phi(e)$ jest ścieżką z $\phi(e^-)$ do $\phi(e^+)$. Natomiast jeśli krawędź $e \in A$ i $\phi(e^-) \neq x'$, to znaczy, że ścieżka $\Phi(e)$ przechodzi przez wierzchołek x' , ale nie jest on jej początkiem, a wówczas $-e \in A$. Skoro jednak $\theta(e) + \theta(-e) = 0$, to zachodzi (*).

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza:

$$\theta'(e')^2 = \left(\sum_{e' \in \Phi(e)} 1 \cdot \theta(e) \right)^2 \leq \left(\sum_{e' \in \Phi(e)} 1^2 \right) \left(\sum_{e' \in \Phi(e)} \theta(e)^2 \right) \leq \beta \sum_{e' \in \Phi(e)} \theta(e)^2.$$

Energia przepływu θ' wynosi:

$$\begin{aligned} \sum_{e'} \theta'(e')^2 r'(e') &\leq \beta \sum_{e'} \sum_{e' \in \Phi(e)} \theta(e)^2 r'(e') = \\ &= \beta \sum_e \theta(e)^2 \sum_{e' \in \Phi(e)} r'(e') \leq \alpha \beta \sum_e \theta(e)^2 r(e) < \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

Dla dwóch grafów G i G' funkcję ϕ przekształcającą wierzchołki G na wierzchołki G' nazywamy **quasi izometrią**, jeśli istnieją dodatnie stałe α, β takie, że dla dowolnych wierzchołków x, y z G zachodzi:

$$\alpha^{-1} \text{dist}(x, y) - \beta \leq \text{dist}'(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha \text{dist}(x, y) + \beta$$

oraz każdy wierzchołek z G' jest w odległości co najwyżej β od obrazu ϕ .

Definicję można rozszerzyć na wszystkie przestrzenie metryczne zamieniając "wierzchołek" na "punkt". Wtedy krata \mathbb{Z}^d jest quasi izometryczna z \mathbb{R}^d .

Fakt: Istnienie quasi izometrii jest relacją równoważności.

Dowód: Zwrotność: oczywista.

Przechodność: Niech ϕ_1 będzie quasi izometrią z G do G' , a ϕ_2 z G' do G'' . Wtedy łatwo sprawdzić, że $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ wraz ze stałymi $\alpha = \alpha_1 \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2$ spełnia pierwszy warunek z definicji quasi izometrii z G do G'' . Ustalmy teraz dowolny wierzchołek v'' z G'' . Mamy $d''(v'', \text{Im}(\phi_2)) \leq \beta_2$, zatem dla $\mathcal{E} > 0$ istnieje wierzchołek v' w G' taki, że $d''(v'', \phi_2(v')) \leq \beta_2 + \mathcal{E}$. Ale $d'(v', \text{Im}(\phi_1)) \leq \beta_1$, czyli dla $\delta > 0$ istnieje wierzchołek v w G taki, że $d'(v', \phi_1(v)) \leq \beta_1 + \delta$. Z definicji ϕ_2 mamy $d''(\phi_2(v'), \phi(v)) \leq \alpha_2 d'(v', \phi_1(v)) + \beta_2 \leq \alpha_2(\beta_1 + \delta) + \beta_2$. Wówczas $d''(v'', \text{Im}(\phi)) \leq d''(v'', \phi(v)) \leq d''(v'', \phi_2(v')) + d''(\phi_2(v'), \phi(v)) \leq \alpha_2(\beta_1 + \delta) + 2\beta_2 + \mathcal{E}$.

Symetryczność: Niech ϕ będzie quasi izometrią z G do G' . Ustalmy $\mathcal{E} > 0$. Dla wierzchołka v' z G' definiujemy $\psi(v')$ jako (jakiś z góry ustalony) wierzchołek v z G , dla którego $d'(v', \phi(v)) \leq d'(v', \text{Im}(\phi)) + \mathcal{E} \leq \beta + \mathcal{E}$. Pokażemy, że ψ jest quasi izometrią z G' do G . Przy powyższych oznaczeniach: $d(\psi(x'), \psi(y')) = d(x, y) \leq \alpha d'(\phi(x), \phi(y)) + \alpha\beta \leq \alpha(d'(\phi(x), y') + d'(y', \phi(y))) + \alpha\beta \leq \alpha(d'(\phi(x), x') + d'(x', y') + d'(y', \phi(y))) + \alpha\beta \leq \alpha d'(x', y') + 2\alpha(\beta + \mathcal{E}) + \alpha\beta$ dla dowolnych wierzchołków x', y' z G' . Analogicznie mamy $d(\psi(x'), \psi(y')) \geq \alpha^{-1}d'(x', y') - 2\alpha^{-1}(\beta + \mathcal{E}) - \alpha^{-1}\beta$. Weźmy dowolny wierzchołek v z G . Niech $v' = \phi(v)$. Wówczas mamy $d(v, \text{Im}(\psi)) \leq d(v, \psi(v')) \leq \alpha d'(\phi(v), \phi(\psi(v'))) + \alpha\beta = \alpha d'(v', \phi(\psi(v'))) + \alpha\beta \leq \alpha(\beta + \mathcal{E}) + \alpha\beta$, z definicji funkcji ψ . \square

Lemat: Niech G i G' będą quasi izometrycznymi grafami. Jeśli c, c', c^{-1}, c'^{-1} są ograniczone oraz stopnie wierzchołków w G i G' są ograniczone, to sieci (G, c) i (G', c') są zgrubnie równoważne.

Dowód: Niech ϕ będzie quasi izometrią z G do G' . Dla krawędzi $\langle x, y \rangle$ z G definiujemy $\Phi(\langle x, y \rangle)$ jako (jakaś ustaloną) zorientowaną ścieżkę realizującą

odległość $\phi(x)$ od $\phi(y)$, tzn. $|\Phi(\langle x, y \rangle)| = d'(\phi(x), \phi(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta = \alpha + \beta$, taką że $\Phi(\langle y, x \rangle)$ jest ścieżką odwrotną. Pokażemy, że ϕ (wraz z Φ) jest włożeniem zgrubnym G w G' . Istnienie włożenia zgrubnego w drugą stronę wynika z symetrii.

Niech M będzie stałą, która ogranicza wszystkie wielkości ze sformułowania lematu. Wówczas dla dowolnej krawędzi e z G mamy $\sum_{e' \in \Phi(e)} r'(e') \leq |\Phi(e)| \cdot M \leq (\alpha + \beta)M \leq (\alpha + \beta) \frac{M^2}{c(e)} = (\alpha + \beta)M^2 r(e)$. Pozostaje pokazać, że istnieje stała $N < \infty$ taka, że $A(e') = \{e : e' \in \Phi(e)\} \leq N$ dla każdego e' z G' .

Ustalmy dowolną krawędź $\langle x', y' \rangle$ z G' oraz krawędź $\langle x_1, y_1 \rangle \in A(\langle x', y' \rangle)$. Jeśli $\langle x', y' \rangle \in \Phi(\langle x, y \rangle)$, to $d'(\phi(x), \phi(x_1)) \leq d'(\phi(x), x') + d'(x', \phi(x_1)) \leq 2(\alpha + \beta)$, bo $|\Phi(e)| \leq \alpha + \beta$. Wówczas $d(x, x_1) \leq \alpha d'(\phi(x), \phi(x_1)) + \alpha\beta \leq 2\alpha(\alpha + \beta) + \alpha\beta =: \gamma$, czyli wszystkie krawędzie z $A(\langle x', y' \rangle)$ mają początek w zbiorze $B_\gamma(x_1)$, zatem $|A(\langle x', y' \rangle)| \leq M \cdot |B_\gamma(x_1)| \leq M(1 + M + M^2 + \dots + M^\gamma) =: N$. \square

Uwaga: Do dowodu istnienia włożenia zgrubnego G w G' użyliśmy jedynie ograniczoności c, c^{-1} i stopni wierzchołków w G .

Rozważmy teraz spacer losowy na \mathbb{Z}^d będący wynikiem d niezależnych prostych spacerów losowych na \mathbb{Z} potraktowanych jako kolejne współrzędne tego spaceru. Innymi słowy jest to spacer chodzący po "przekątnych" \mathbb{Z}^d , wybierając jedną z 2^d przekątnych z równym prawdopodobieństwem. Szansa, że ten spacer po $2n$ krokach wróci do punktu wyjścia wynosi $\left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right)^d$, bo każdy z d niezależnych spacerów musi zrobić tyle samo kroków w obie strony. Korzystając z formuły Stirlinga otrzymujemy asymptotyczną wartość tego prawdopodobieństwa $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)^d$. Na mocy faktu z podrozdziału 2.2 nasz spacer jest powracający dokładnie wtedy, gdy $d < 3$.

Niech G będzie grafem odpowiadającym temu spacerowi i niech G' będzie zwykłą kratą na \mathbb{Z}^d . Wtedy ϕ zadana jako identyczność na wierzchołkach G jest quasi izometrią pomiędzy G a G' . Mamy bowiem $dist(x, y) \leq dist'(\phi(x), \phi(y)) \leq d \cdot dist(x, y)$, gdyż każdy krok w \mathbb{Z}^d "po przekątnej" można osiągnąć poprzez d zwykłych kroków "po współrzędnych". Stąd wynika twierdzenie Pólyi.

3 Przykłady

W niniejszym rozdziale postaramy się przeanalizować szeroką gamę interesujących przykładów.

3.1 Grafy w przestrzeniach euklidesowych i nie tylko

Twierdzenie Pólyi pokazało nam, że wymiar przestrzeni ma kluczowe znaczenie dla typu spaceru, natomiast quasi izometrie, że spacery na podobnych grafach są tego samego typu. Można się więc zastanawiać, czy dowolny graf wpisany w sensowny sposób w \mathbb{R}^d jest powracający wtedy i tylko wtedy, gdy $d \leq 2$.

Dla dowolnego grafu G przez k -fuzz G rozumiemy graf powstały z G poprzez dodanie do niego krawędzi łączących wierzchołki, dla których istnieje ścieżka w G długości co najwyżej k .

Lemat (o k -fuzzie grafu): Dla grafu G oznaczmy przez G_k jego k -fuzz. Spacery losowe na sieciach (G, c) i (G_k, c') są tego samego typu, o ile stopnie wierzchołków w G oraz funkcje c, c', c^{-1}, c'^{-1} są ograniczone.

Dowód: Jeśli stopnie wierzchołków G są ograniczone przez n , to stopnie wierzchołków G_k są ograniczone przez $n + n^2 + n^3 + \dots + n^k$. Dalej, G i G_k są w quasi izometrii, bo $\frac{1}{k} \text{dist}(x, y) \leq \text{dist}_{G_k}(x, y) \leq \text{dist}(x, y)$. Na mocy lematu z podrozdziału o quasi izometriach mamy tezę. \square

Mówimy, że graf G jest wpisany w **cywilizowany sposób** w \mathbb{R}^d , gdy istnieją stałe $M < \infty$ i $r > 0$ takie, że:

- długość pojedynczej krawędzi jest nie większa niż M ,
- odległość między dwoma dowolnymi wierzchołkami jest nie mniejsza niż r .

Fakt: Jeśli można wpisać G w cywilizowany sposób w \mathbb{R}^2 , a funkcja c jest ograniczona z góry, to spacer losowy na (G, c) jest powracający.

Dowód: Niech G będzie wpisany w cywilizowany sposób w \mathbb{R}^2 i niech Z^2 będzie grafem wpisanym w to samo \mathbb{R}^2 , identycznym z kratą na \mathbb{Z}^2 , ale o krawędziach długości $\frac{r}{2}$. Wtedy w każdej kratce Z^2 znajduje się co najwyżej jeden wierzchołek z G . Niech \hat{x} oznacza prawy górny róg kratki Z^2 , w której się znajduje się wierzchołek x . Zauważmy, że jeśli x i y są sąsiadami w G , to

$\|\hat{x} - \hat{y}\|_2 < M + 2r$, a zatem istnieje pewna stała N taka, że $\text{dist}_{Z^2}(\hat{x}, \hat{y}) \leq N$ dla dowolnych $x \sim y$. Niech G' oznacza N -fuzz Z^2 . Załóżmy nie wprost, że spacer na (G, c) jest chwilowy. BZO c^{-1} jest ograniczone (gdyby nie było, bierzemy $\hat{c} = \min(c, 1)$ i spacer na (G, \hat{c}) nadal jest chwilowy). Niech funkcja $c' : E(G') \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ będzie taka, że $c'(e') = c(\langle x, y \rangle)$, jeśli e' łączy \hat{x} z \hat{y} , a na pozostałych krawędziach wynosi 1. Wtedy (G, c) jest właściwie podsięcią (G', c') , czyli spacer na (G', c') też jest chwilowy. Lemat o k -fuzzie grafu dla (G', c') i $(Z^2, \mathbf{1})$ daje nam sprzeczność z twierdzeniem Pólyi. \square

Niestety podobne twierdzenie dla \mathbb{R}^3 nie jest prawdziwe. Istnieje graf, który można wpisać w cywilizowany sposób w \mathbb{R}^3 , ale nie w \mathbb{R}^2 , i na którym prosty spacer losowy jest powracający.

Przykładem takiego grafu jest krata Z^3 pozbawiona wszystkich pionowych krawędzi poza pojedynczą osią (np. OZ). Inaczej mówiąc, jest to nieskończenie wiele kopii krat Z^2 ustawionych jedna nad drugą, których środki są przyłączone w wierzchołkach pojedynczego Z . Tego grafu nie wpisujemy w cywilizowany sposób w \mathbb{R}^2 , bo to oznaczałoby, że możemy zanurzyć nieskończenie wiele kopii Z^2 w k -fuzzie Z^2 . Natomiast prosty spacer losowy na tym grafie jest powracający, bo spacerując po jednej z kopii Z^2 wiemy, że z prawdopodobieństwem 1 odwiedzimy nieskończenie wiele razy jej środek, a więc kiedyś na pewno zrobimy krok w górę albo w dół (z równym prawdopodobieństwem) pionowej osi Z , a taki spacer losowy na Z jest powracający.

Dla grafów wpisanych w \mathbb{R}^3 pozostaje nam korzystać z ogólnego faktu:

Fakt: Graf G jest quasi izometryczny z przestrzenią metryczną (X, ρ) , jeśli możemy go w nią wpisać w taki sposób, że istnieją takie stałe $R, M, N, r > 0$, że:

- dowolny punkt $p \in X$ jest w odległości co najwyżej R od wierzchołków G
- długość pojedynczej krawędzi jest nie większa niż M ,
- dla dowolnych wierzchołków x, y istnieje ścieżka o długości co najwyżej N łącząca x z wierzchołkiem x' , którego odległość od y jest mniejsza niż $\rho(x, y)$ o co najmniej r .

Dowód: Mamy $\rho(x, y) \leq M \text{dist}(x, y)$ oraz $\text{dist}(x, y) \leq N \frac{1}{r} \rho(x, y) + 1$, ponieważ aby przybliżyć się do jakiegoś wierzchołka o r potrzeba maksymalnie N kroków. \square

3.2 Drzewa

Drzewa są stosunkowo proste w analizie i potrafią być przydatne przy badaniu bardziej skomplikowanych grafów, nie oznacza to jednak, że nie da się skonstruować ciekawych przykładów drzew.

Drzewo nazywamy **ukorzeniem**, jeśli wyróżnimy w nim pewien wierzchołek, zwany **korzeniem**. Będziemy go oznaczać przez a . Wówczas piszemy $|x| = \text{dist}(a, x)$. Mówimy, że drzewo jest **sferycznie symetryczne**, jeśli $\text{deg}(x)$ zależy jedynie od $|x|$.

Niech T będzie lokalnie skończonym ukorzeniem drzewem o nieskończenie wielu wierzchołkach. Nieskończona prosta ścieżka zaczynająca się w korzeniu T nazywana jest **gałęzią**. Zbiór wierzchołków $T_n = \{x \in T : |x| = n\}$ nazywamy n -tym **poziomem** T . Ponadto definiujemy **dolne (wykładnicze) tempo wzrostu** drzewa:

$$\underline{gr} T := \liminf_n \sqrt[n]{|T_n|}.$$

Założmy, że T jest sferycznie symetryczne i rozważmy prosty spacer losowy na T . Jeśli ustalimy korzeń jako źródło napięcia, to zauważmy, że napięcie na wszystkich wierzchołkach z T_n jest takie samo. Będziemy teraz postępować podobnie jak w komentarzu do nierówności Nasha-Williamsa. Dla każdego n możemy utożsamić T_n do pojedynczego wierzchołka. Następnie korzystamy z reguły połączenia równoległego, a potem szeregowego, aby otrzymać:

$$R_{eff}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|T_n|}.$$

Kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego daje nam:

Fakt: Jeśli drzewo T jest sferycznie symetryczne i $\underline{gr} T > 1$, to prosty spacer losowy na T jest chwilowy.

Na przykład chwilowy jest prosty spacer losowy na pełnym drzewie binarnym. Jest to drzewo, którego wszystkie wierzchołki mają stopień równy 3 (poza korzeniem; $\text{deg}(a) = 2$).

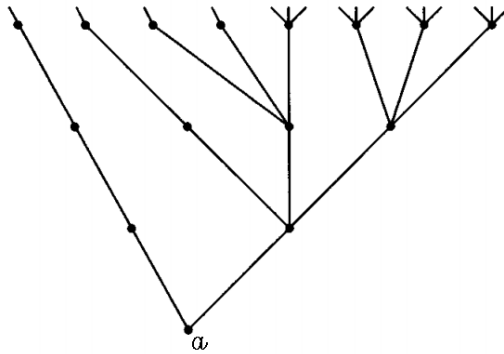
Warunek $\underline{gr} T > 1$ nie jest warunkiem koniecznym. Rozważmy sferycznie symetryczne drzewo, dla którego $\text{deg}(x) = 4$, jeśli $|x| = 2^k - 1, k = 0, 1, \dots$ oraz $\text{deg}(x) = 2$ dla pozostałych wierzchołków. Innymi słowy - każda gałąź tego drzewa rozgałęzia się na trzy, gdy odległość od korzenia się podwaja. Drzewo to jest czasem nazywane $NT_{\log_2 6}$. Jego dolne wykładnicze tempo wzrostu wynosi oczywiście 1 (w pewnym sensie tempo wzrostu tego drzewa

jest tempem wielomianowym stopnia $\log_2 6$), ale:

$$R_{eff} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \infty,$$

czyli prosty spacer losowy na $NT_{\log_2 6}$ jest chwilowy. Drzewo to jest o tyle istotne, że da się je wpisać w kratę \mathbb{Z}^3 , co pokazuje przypadek $d = 3$ w twierdzeniu Pólyi.

Założenia sferycznej symetryczności też nie można pominąć, co obrazuje przykład drzewa T_{1-3} (Rys. 1). Powstaje ono w następujący sposób: na każdym poziomie drzewa pierwsza połowa gałęzi (ta od lewej strony, patrząc na Rys. 1) się nie rozgałęzia, natomiast druga połowa rozgałęzia się na trzy. W pewnym sensie przypomina ono drzewo binarne - jego dolne tempo wzrostu także wynosi 2.



Rysunek 1: Drzewo T_{1-3}

Z drugiej strony jednak, prosty spacer losowy na tym drzewie jest powracający! Istotnie: ustalmy dowolny przepływ jednostkowy θ na T_{1-3} . Oznaczmy skrajnie prawą gałąź T_{1-3} przez g . Jest to jedyna gałąź tego drzewa, która się stale rozgałęzia. To znaczy, że dla dowolnego wierzchołka x spoza g mamy jedynie skończenie wiele gałęzi, przechodzących przez x . Dlatego, jeśli przepływ przez x jest niezerowy, to przynajmniej na jednej z tych (skończenie wielu) gałęzi mamy stały i niezerowy przepływ, a wtedy $\mathcal{E}(\theta) = \infty$. Jednak jeśli poza g przepływ θ jest zerowy, to oznacza, że wszystko płynie przez g , czyli również $\mathcal{E}(\theta) = \infty$.

Interesującym może wydać się też fakt, że kryterium Nasha-Williamsa w tym przypadku zawodzi. Gdyby chcieć wybrać ciąg całkowicie rozłącznych zbiorów oddzielających a od ∞ , to liczba gałęzi do zablokowania każdym kolejnym zbiorem rośnie wykładniczo, a więc dla dowolnego wyboru takich zbiorów szereg z tezy kryterium jest zbieżny.

3.3 Płaszczyzna hiperboliczna

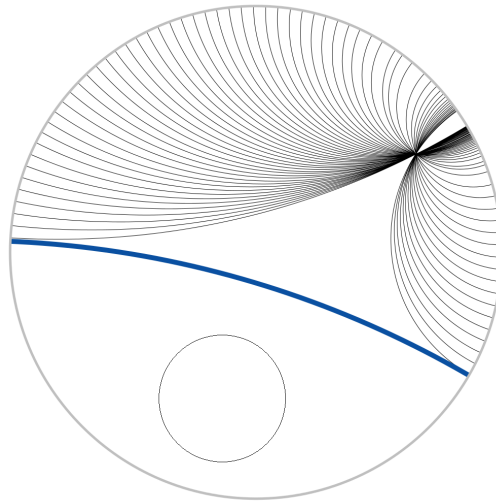
Geometria hiperboliczna to geometria otrzymana z geometrii euklidesowej przez zastąpienie postulatu równoległości przez następujący aksjomat: Dla dowolnej prostej l i punktu P nieleżącego na l istnieją co najmniej dwie (zatem nieskończenie wiele) proste przez P nieprzecinające l (inaczej mówiąc: równoległe do l).

Nas będą interesować spacery losowe na grafach narysowanych (w sensowny sposób) na płaszczyźnie hiperbolicznej. Niestety nie da się jej izometrycznie włożyć w trójwymiarową przestrzeń euklidesową, dlatego potrzebny nam będzie odpowiedni model.

Przez płaszczyznę hiperboliczną będziemy rozumieć przestrzeń metryczną (U, ρ) , gdzie:

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \rho(z_1, z_2) = 2 \tanh^{-1} \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|.$$

Jest to model dysku Poincaré, zwany także wiernokątnym modelem dysku, ponieważ przedstawia płaszczyznę hiperboliczną jako wnętrze dysku jednostkowego, zachowując przy tym kąty pomiędzy liniami, za to zmieniając odległości między punktami.



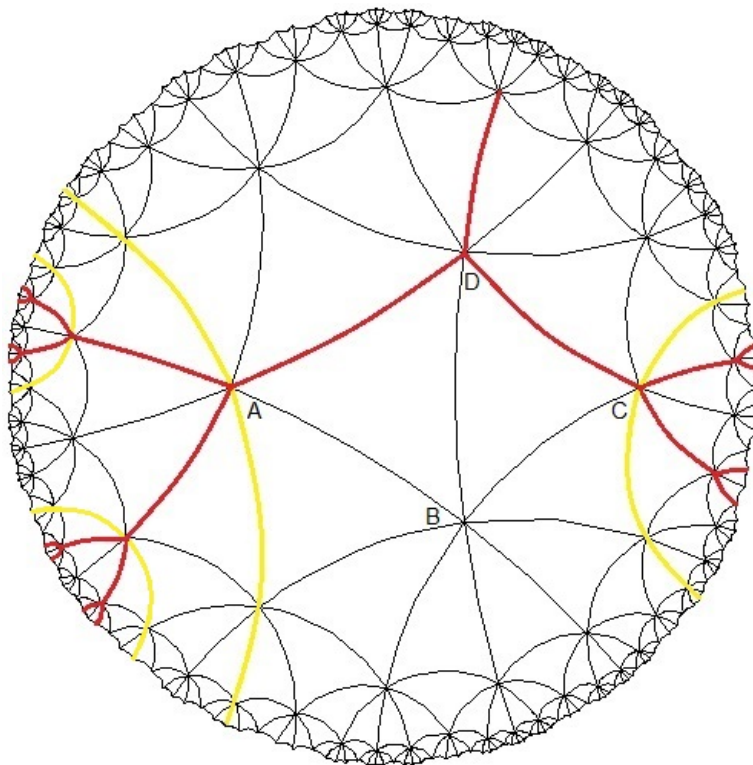
Rysunek 2: Proste i okrąg w modelu dysku Poincaré

Proste w modelu Poincaré są przedstawiane jako łuki prostopadłe do granicy dysku, natomiast okręgi jako zwykłe euklidesowe okręgi wewnątrz dysku (Rys. 2). Należy jednak pamiętać, że hiperboliczny środek takiego okręgu

znajduje się bliżej centrum dysku niż jego euklidesowy środek. Na Rys. 2 widać również, jak wyglądają proste równoległe (do niebieskiej prostej) w tym modelu.

Fakt: Jeśli G jest grafem quasi izometrycznym z płaszczyzną hiperboliczną, a funkcja c jest ograniczona z dołu przez dodatnią stałą, to spacer losowy na (G, c) jest chwilowy.

Dowód: Wystarczy pokazać, że istnieje graf quasi izometryczny z płaszczyzną hiperboliczną, na którym prosty spacer losowy jest chwilowy. Pokażemy, że takim grafem jest parkietaż trójkątami rzędu 8 ukazany na Rys. 3, który będziemy oznaczać symbolem $\{3, 8\}$. Jest to graf złożony z przystających, równobocznych trójkątów hiperbolicznych; w każdym jego wierzchołku spotyka się osiem takich trójkątów. Oznacza to, że graf $\{3, 8\}$ wygląda identycznie z punktu widzenia dowolnego wierzchołka, tzn. dla dowolnych dwóch wierzchołków x, y istnieje izometryczny automorfizm płaszczyzny hiperbolicznej, przeprowadzający x na y . Kąt wewnętrzny pojedynczego trójkąta wynosi $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.



Rysunek 3: Parkietaż trójkątami rzędu 8 płaszczyzny hiperbolicznej.

Zacniemy od tego, że prosty spacer na grafie $\{3, 8\}$ jest chwilowy. W tym celu pokażemy, że zawiera on drzewo binarne. Weźmy dowolny wierzchołek $\{3, 8\}$ jako korzeń i dowolną wychodzącą z niego krawędź. Kolejne krawędzie naszego podgrafu to te, które znajdują się najbliżej linii przedłużającej krawędź poprzednią (ale nie leżą na niej). Otrzymujemy podgraf jak na Rys. 3 (kolor czerwony). Aby stwierdzić, że jest to drzewo binarne należy pokazać, że idąc od korzenia podgraf ten się jedynie rozgałęzia, a nie łączy tzn., że jeśli się w jakimś punkcie rozgałęzia, to te dwa rozgałęzienia się już nie spotkają. Pokażemy, dlaczego tak jest na przykładzie rozgałęzienia w punkcie D . Zauważmy, że wszystkie linie podobne do tych zaznaczonych na Rys. 3 na żółto są równoległe do siebie nawzajem. Rozważmy dowolną krawędź z lewego rozgałęzienia (tzn. tego w kierunku punktu A). Znajduje się ona po lewej (innej niż punkt D) stronie od pewnej linii równoległej do żółtej linii przez A , a zatem całe lewe rozgałęzienie pozostaje po lewej stronie od żółtej linii przez A . Analogicznie prawe rozgałęzienie pozostaje po prawej od żółtej linii przez C .

Pokażemy teraz, że graf $\{3, 8\}$ jest quasi izometryczny z płaszczyzną hiperboliczną. Wszystkie krawędzie grafu mają jednakową długość wynoszącą $\rho(A, B) = |AB|$, zatem mamy $\rho(x, y) \leq |AB| \operatorname{dist}(x, y)$ dla dowolnych wierzchołków x, y . Oczywiście każdy punkt z płaszczyzny hiperbolicznej znajduje się w jakimś trójkącie, a więc jego odległość od wierzchołków $\{3, 8\}$ możemy oszacować przez $|AB|$. Ustalmy dwa różne wierzchołki x, y . BZO możemy założyć, że x leży w punkcie A , a linia łącząca x i y przechodzi pomiędzy punktem B a środkiem odcinka \overline{BD} . Oznaczmy punkt, w którym leży wierzchołek y przez Y . Zauważmy, że $|BY| < |AY|$, bo w $\triangle ABY$ mamy $\angle ABY \geq 90^\circ$, a suma kątów w trójkącie hiperbolicznym jest zawsze mniejsza niż 180° . Ponadto różnica tych długości jest najmniejsza, gdy $\angle ABY$ jest najmniejszy w stosunku do $\angle BAY$, czyli gdy $Y = C$, a zatem $|AY| - |BY| \geq |AC| - |BC| =: r$. Stąd $\operatorname{dist}(x, y) \leq \frac{1}{r} \rho(x, y) + 1$. \square

Zakończenie

Mam nadzieję, że dzięki tej lekturze spacerory losowe na grafach nieskończonych stały się bardziej zrozumiałe i że udało się nimi zainteresować czytelnika.

Jeśli jednak komuś praca wydała się zbyt techniczna lub zbyt pośpieszna, polecam niezwykle przystępnie napisaną książkę Doyle'a i Snella [1], która pełna jest ilustracji i prostych przykładów.

Oczywiście ta praca licencjacka jest tylko wprowadzeniem do tematu, na który można spoglądać znacznie szerzej oraz na wiele innych sposobów. Przykładowo przyjęliśmy, że grafy mają być lokalnie skończone. Można zrezygnować z tego założenia (porównaj: podrozdział 1.2), lecz powstają wtedy pewne problemy techniczne przy definiowaniu podstawowych pojęć, co odbiłoby się na przejrzystości pracy.

Często ograniczaliśmy również funkcję wag krawędzi. Pozwalało nam to skupić się na samej strukturze grafu. Typ spaceru zależał wtedy głównie od "obszerności" przestrzeni / grafu, na którym się odbywał, tzn. od tego jak szybko rośnie objętość / liczba wierzchołków w przeciętnej kuli wraz ze wzrostem jej promienia. Jest to jednak większe ograniczenie niż może się z początku wydawać. Rozważmy spacer na \mathbb{Z} , który robi krok albo w prawo z prawdopodobieństwem $p > \frac{1}{2}$, albo krok w lewo. Jego prawdopodobieństwa przejścia są stałe, ale odpowiednia funkcja wag nie jest ograniczona. Zauważmy, że ten spacer jest chwilowy w przeciwieństwie do prostego spaceru na \mathbb{Z} . Większa swoboda w doborze prawdopodobieństw przejścia pozwala nam w pewnym sensie sztucznie kierować spacerem.

Temu, kto chciałby kontynuować poznawanie spacerów losowych w tonie tej pracy, np. dowiedzieć się, co dzieje się ze spacerami na drzewach, dla których prawdopodobieństwa przejścia dla danego wierzchołka w kierunku korzenia są większe niż w kierunku przeciwnym, polecam książkę Lyonsa i Peresa [4] - podrozdział 3.2.

Literatura

- [1] Peter G. Doyle and J. Laurie Snell. *Random Walks and Electric Networks*. Mathematical Association of America, 1984.
- [2] Gregory F. Lawler. *Introduction to Stochastic Processes*. Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [3] Gregory F. Lawler. *Random Walk and the Heat Equation*. Department of Mathematics, University of Chicago, 2010.
- [4] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press, 2016.
- [5] Wolfgang Woess. *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*. Cambridge University Press, 2008.