Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka teoretyczna

Jakub Niksiński

Rozwiązanie problemu Waringa ze szczególnym uwzględnieniem zależności od wymiaru w oszacowania błędu. Znalezienie jawnych oszacowań dla błędów wyższego rzędu w pracy Vaughan - Wooley

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
dr. hab. inż. Błażeja Wróbla

Wrocław 2022

Wprowadzenie

Niech $R_s(n)$ oznacza liczbę reprezentacji liczby n jako sumę s k-tych potęg liczb całkowitych dodatnich, gdzie $s, n, k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.W 1770 roku Warring sformułował hipotezę, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje s takie, że dla wszystkich n istnieje $u \leq s$ dla którego zachodzi $R_u(n) > 0$, tę hipotezę w tym samym roku dla $k = 2$ udowodnił Lagrange, natomiast w 1909 roku Hilbert [4] udowodnił tę hipotezę dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.
W dalszych latach matematycy byli zainteresowani przybliżoną wartością $R_s(n)$ dla odpowiednio dużych $n \in \mathbb{N}$. Jako pierwsi Hardy oraz Littlewood [3] w 1920 roku pokazali, że przy założeniu że $s \geq (k-2)2^{k-1} + 5$ zachodzi poniższy asymptotyczny wzór

$$R_s(n) \sim \frac{\Gamma(1+\frac{1}{k})^s}{\Gamma(s/k)} \mathfrak{S}_s(n) n^{s/k-1} \tag{0.1}$$

gdy $n \to \infty$, gdzie *szereg singularny* $\mathfrak{S}_s(n)$ jest zdefiniowany poniższym wzorem

$$\mathfrak{S}_s(n) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ NWD(a,q)=1}}^{q} \left(q^{-1} \sum_{r=1}^{q} e^{2\pi i a r^k/q}\right)^s e^{-2\pi i n a/q}. \tag{0.2}$$

W pracy udowodnimy dla $k = 2$ poniższą formułę asymptotyczną

$$R_s(n) = n^{s/k-1}(\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 n^{-1/k} + ... + \mathfrak{C}_J n^{-J/k}) + o(n^{(s-J)/k-1}) \tag{0.3}$$

gdzie $o(n^{(s-J)/k-1})/n^{(s-J)/k-1} \to 0$, gdy $n \to \infty$. Rozumowanie jest oparte na pracy Robert C. Vaughan , Trevor D. Wooley [8]. Naszym wkładem jest oszacowanie jakiego rzędu wielkości w zależności od s jest błąd $o(n^{(s-J)/k-1})$ we wzorze (0.3). Skupimy się na otrzymaniu wersji wzoru (0.3) z błędem multiplikatywnym, mianowicie

$$R_s(n) = n^{s/k-1}(\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 n^{-1/k} + ... + \mathfrak{C}_J n^{-J/k})(1 + o(n^{-J/k})) \tag{0.4}$$

i podaniu jawnego oszacowania na błąd $o(n^{-J/k})$ we terminach s. W rozważanym przez nas problemie parametr s pełni funkcje wymiaru przestrzeni. Można więc powiedzieć, że celem tej pracy jest znalezienie jawnego oszacowania błędu we wzorze (0.4) w terminach wymiaru.
W tej pracy będziemy się jedynie ograniczać do $k = 2$, ponieważ dla $k > 2$ czasami potrzeba bardziej zaawansownych metod.Większość metody przedstawionej w tej pracy da się uogólnić, tak aby działały również dla $k > 2$.

Spis treści

1 Podstawowe oznaczenia i definicje

W tym rozdziale przedstawimy podstawowe oznaczenia i definicje.
W poniższej pracy zakładamy, że $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
Dla skończonego zbioru A poprzez $\#A$ będziemy oznaczać liczbę jego elementów. Ponadto dla $a, b \in \mathbb{Z}$ będziemy stosować oznaczenie (a, b) dla największego wspólnego dzielnika liczb a oraz b, w nielicznych przypadkach (a, b) będzie oznaczać uporządkowaną parę liczb a, b, natomiast wtedy powinno to być jasne z kontekstu.
Dla liczby pierwszej p oraz $a, n \in \mathbb{N}$ zapis $p^a || n$, oznacza $p^a | n$ oraz $p^{a+1} \nmid n$, czyli wtedy p^a jest największą potęgą liczby p dzielącą n.
Dla $\theta \in \mathbb{R}$ będziemy używać następujących oznaczeń

$$\lfloor \theta \rfloor := \max_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \leq \theta}} n, \quad \lceil \theta \rceil := \min_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq \theta}} n, \quad \{\theta\} := \theta - \lfloor \theta \rfloor, \quad ||\theta|| := \min_{n \in \mathbb{Z}} |\theta - n|, \quad e(\theta) = e^{2\pi i \theta}.$$

Fakt 1.1. Dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta|| \tag{1.1}$$

$$||n\alpha|| \leq |n| ||\alpha|| \tag{1.2}$$

$$|| - \alpha|| = ||\alpha|| \tag{1.3}$$

Definicja 1.2. Dla $s, n \in \mathbb{N}$ piszemy

$$R_s(n) = \#\{(m_1, m_2, ..., m_s) \in \mathbb{N}^s : m_1^2 + m_2^2 + ... + m_s^2 = n\}.$$

Naszym celem będzie udowodnienie poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.3. *Dla $J, s, n \in \mathbb{Z}$, gdzie $J \geq 0$, $s \geq \max(4J+5, 6)$, $n \geq Cs^3$, gdzie C jest pewną stałą niezależną od s, zachodzi poniższy wzór*

$$R_s(n) = n^{s/2-1}(\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 n^{-1/2} + ... + \mathfrak{C}_J n^{-J/2})(1 + o(n^{-J/2}))$$

gdzie $n^{J/2} \cdot o(n^{-J/2}) \to 0$, dla $n \to \infty$ oraz dla $0 \leq j \leq J$ mamy

$$\mathfrak{C}_j = (-\frac{1}{2})^j \binom{s}{j} \frac{\Gamma(3/2)^{s-j}}{\Gamma((s-j)/2)} \mathfrak{S}_{s-j}(n),$$

przy czym wyraz $\mathfrak{S}_{s-j}(n)$ jest zdefinowany we wzorze (0.2).

W dalszej części pracy uzasadnimy, że szereg z równości (0.2) jest zbieżny dla $s \geq 5$, ponadto zachodzi $|o(n^{-J/2})| \leq cn^{-J/2-1/8}$ dla
$n \geq (2s)^{8s} \cdot \frac{1}{\Gamma(3/2)^{16s}} \cdot (16(s+1))^{16(s+1)}$ oraz pewnej stałem $c > 0$, niezależnej od n oraz s.

Definicja 1.4. Dla $k \in \mathbb{N}$, niech $d(k)$ oznacza liczbę dzielników liczby k.

Definicja 1.5. Dla $n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$ definiujemy

$$f(\theta) = \sum_{1 \le x \le \sqrt{n}} e(\theta x^2)$$

Korzystając z poniższej równości

$$\int_0^1 e(h\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 1, & \text{dla } h = 0 \\ 0, & \text{dla } h \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

prawdziwy jest następujący fakt

Fakt 1.6. Dla $s, n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$R_s(n) = \int_0^1 f(\alpha)^s e(-n\alpha)\, d\alpha. \tag{1.4}$$

Powyższa równość pozwala nam szacować przybliżoną wartość $R_s(n)$. Od tego momentu będziemy przyjmować, że $n \in \mathbb{N}$ jest ustaloną odpowiednio dużą liczbą oraz $P = \sqrt{n}$.
Idea Hardy'ego oraz Littlewooda polega na tym, aby podzielić przedział $[0, 1)$ na 2 zbiory w zależności od tego jak duża jest odległość danej liczby od liczb wymiernych o odpowiednio małym mianowniku.

Definicja 1.7. Dla $0 \le a \le q \le P$, gdzie $a, q \in \mathbb{Z}$, $(a, q) = 1$, niech

$$\mathfrak{M}(q, a) = \{\alpha \in [0, 1) : |q\alpha - a| \le \frac{1}{4P}\}$$

zbiory powyższej postaci ze względów historycznych będziemy nazywać *dużymi łukami*. Ponadto niech

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\substack{0 \le a \le q \le P \\ (a,q)=1}} \mathfrak{M}(q, a).$$

Definicja 1.8. Definiujemy zbiór *małych łuków* w następujący sposób

$$\mathfrak{m} = [0, 1) \setminus \mathfrak{M}.$$

W następnych rozdziałach przekonamy się, że liczby ze zbioru $\mathfrak{M}$ mają największy wpływ na wartość całki po prawej stronie równości (1.4).

Lemat 1.9. *Jeśli $a \neq a'$ lub $q \neq q'$,gdzie pary liczb a, q oraz a', q' spełniają założenia definicji 1.7, to wówczas zachodzi*

$$\mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a') = \emptyset$$

Dowód. Załóżmy nie wprost, że $\mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a') \neq \emptyset$. Wówczas istnieje $\alpha \in \mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a')$, stąd zachodzą poniższe nierówności

$$\frac{1}{4P}(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'}) \geq |\alpha - \frac{a}{q}| + |\alpha - \frac{a'}{q'}| \geq |\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}| = \frac{|aq' - a'q|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'}$$

ponieważ $q, q' \leq P$, to zachodzi

$$\frac{1}{qq'} = \frac{1}{2}(\frac{1}{qq'} + \frac{1}{qq'}) \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{qP} + \frac{1}{q'P}) = \frac{1}{2P}(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'})$$

otrzymaliśmy sprzeczność, zatem $\mathfrak{M}(q,a) \cap \mathfrak{M}(q',a') = \emptyset$. □

Lemat 1.10. *Dla pary liczb a,q spełniających założenia definicji 1.7, jeśli $q > 1$ to zachodzi*

$$\{\alpha - \frac{a}{q} : \alpha \in \mathfrak{M}(q,a)\} = \Big[-\frac{1}{4Pq}, \frac{1}{4Pq}\Big].$$

Ponadto dla $q = 1$ mamy

$$\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{M}(1,0)\} = \Big[0, \frac{1}{4P}\Big],$$

$$\{\alpha - 1 : \alpha \in \mathfrak{M}(1,1)\} = \Big[-\frac{1}{4P}, 0\Big).$$

Dowód. Z definicji 1.7 wynika, że

$$\mathfrak{M}(q,a) = \Big[\frac{a}{q} - \frac{1}{4Pq}, \frac{a}{q} + \frac{1}{4Pq}\Big] \cap [0,1). \tag{1.5}$$

Jeśli $q > 1$, to $(a,q) = 1 \implies q \nmid a$, co wraz z $a \leq q$ implikuje $\frac{a}{q} \geq \frac{1}{q}$ oraz $1 - \frac{a}{q} \geq \frac{1}{q}$, zatem zachodzi

$$\Big[\frac{a}{q} - \frac{1}{4Pq}, \frac{a}{q} + \frac{1}{4Pq}\Big] \subseteq \Big(\frac{a}{q} - \frac{1}{q}, \frac{a}{q} + \frac{1}{q}\Big) \subseteq (0,1)$$

co wraz z równością (1.5) udowadnia lemat dla $q > 1$. Druga częśc lematu jest oczywista z definicji 1.7 oraz równości (1.5) □

2 Oszacowanie na małych łukach

W tej części udowodnimy oszacowanie puktowe funkcji $f(\alpha)$, które następnie wykorzystamy by ograniczyć od góry wartość $\int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^t \, d\alpha$ dla odpowiednio dużych t.

Lemat 2.1. *Niech $X, Y \in \mathbb{R}$, $Y > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, wówczas zachodzi*

$$\sum_{X<x\leq X+Y} e(\alpha x) \leq \min(Y, ||\alpha||^{-1}), \tag{2.1}$$

przy czym przyjmujemy $\min(Y, ||0||^{-1}) = Y$.

Dowód. Z jednej strony mamy oszacowanie

$$\Big| \sum_{X<x\leq X+Y} e(\alpha x) \Big| \leq Y$$

co udowadnia tezę, gdy $\alpha = 0$. Załóżmy, że $\alpha \neq 0$, wówczas mamy

$$\Big| \sum_{X<x\leq X+Y} e(\alpha x) \Big| = \Big| \sum_{x=\lfloor X \rfloor+1}^{\lfloor X+Y \rfloor} e(\alpha x) \Big| = \Big| \frac{e(\alpha(\lfloor X+Y \rfloor + 1)) - e(\alpha(\lfloor X \rfloor + 1))}{e(\alpha) - 1} \Big| \leq$$

$$\frac{2}{|e(\alpha) - 1|} = \frac{2}{|2isin(\pi\alpha)|} = \frac{1}{|sin(\pi\alpha)|} \leq \frac{1}{2||\alpha||} \leq ||\alpha||^{-1},$$

w przedostatniej nierówności skorzystaliśmy z tego, że funkcja $|sin(\pi x)|$ jest 1 okresowa oraz dla $|x| \leq 1/2$ zachodzi $2|x| \leq |sin(\pi x)|$. Powyższa nierówność wraz z początkowym szacowaniem daje tezę lematu. □

Lemat 2.2. *(twierdzenie Dirichleta o aproksymacji).*
Niech $\alpha, X \in \mathbb{R}$, załóżmy, że $X \geq 1$. Wówczas istnieją liczby $a \in \mathbb{Z}$ oraz $q \in \mathbb{N}, q \leq X$ takie, że zachodzi $(a, q) = 1$ oraz

$$|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{qX} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Dowód. Niech $N = \lfloor X \rfloor$, rozważmy N liczb postaci $\{\alpha r\}$, gdzie $1 \leq r \leq N$, każda z tych liczb jest zawarta w przedziale [0,1). Jeśli zachodziłoby $\{\alpha r_0\} \in [0, \frac{1}{N+1})$ dla pewnego r_0, to wówczas mielibyśmy

$$|\alpha - \frac{\lfloor \alpha r_0 \rfloor}{r_0}| \leq \frac{1}{r_0(N+1)} < \frac{1}{r_0 X} \leq \frac{1}{\frac{r_0}{(r_0, \lfloor \alpha r_0 \rfloor)} X}.$$

Wówczas teza jest spełniona dla $q = \frac{r_0}{(r_0, \lfloor \alpha r_0 \rfloor)}$, $a = \frac{\lfloor \alpha r_0 \rfloor}{(r_0, \lfloor \alpha r_0 \rfloor)}$. Analogicznie jeśli by zachodziło $\{\alpha r_0\} \in [\frac{N}{N+1}, 1)$ dla pewnego r_0, to wówczas mielibyśmy

$$|\alpha - \frac{\lfloor \alpha r_0 \rfloor + 1}{r_0}| \leq \frac{1}{r_0(N+1)} < \frac{1}{r_0 X} \leq \frac{1}{\frac{r_0}{(r_0, \lfloor \alpha r_0 \rfloor + 1)} X}.$$

Wówczas teza jest spełniona dla $q = \frac{r_0}{(r_0, \lfloor \alpha r_0 \rfloor + 1)}$, $a = \frac{\lfloor \alpha r_0 \rfloor + 1}{(r_0, \lfloor \alpha r_0 \rfloor + 1)}$. Teraz załóżmy, że każda z liczb postaci $\{\alpha r\}$, gdzie $1 \leq r \leq N$ leży w jednym z $N - 1$ poniższych przedziałów

$$[\frac{j-1}{N+1}, \frac{j}{N+1}) \quad (2 \leq j \leq N).$$

Wtedy z zasady szufladkowej istnieją $u < v$, takie że liczby $\{\alpha u\}$, $\{\alpha v\}$ znajdują się w tym samym przedziale, stąd otrzymujemy

$$|\alpha(v-u) - (\lfloor \alpha v \rfloor - \lfloor \alpha u \rfloor)| \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{X},$$

zatem rozumując analogicznie jak poprzednio teza zachodzi dla $q = \frac{v-u}{(v-u, \lfloor \alpha v \rfloor - \lfloor \alpha u \rfloor)}$, $a = \frac{\lfloor \alpha v \rfloor - \lfloor \alpha u \rfloor}{(v-u, \lfloor \alpha v \rfloor - \lfloor \alpha u \rfloor)}$. □

Wniosek 2.3. *Dla $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ istnieje nieskończnie wiele par liczb (a, q), takich że $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(a, q) = 1$ oraz zachodzi*

$$|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Dowód. Lemat 2.2 gwarantuje istnienie takich par liczb. Niech

$$A = \{(a, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : (a, q) = 1, |\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{q^2}\}$$

Załóżmy nie wprost, że zbiór A jest skończony, niech

$$X = \frac{2}{\min\limits_{(a,q) \in A} |\alpha - \frac{a}{q}|},$$

mianownik powyższego ułamka jest niezerowy, ponieważ $\alpha \notin \mathbb{Q}$ oraz zbiór A jest skończony. Z lematu 2.2 istnieje para $(a, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, taka że $(a, q) = 1$, $q \leq X$ oraz zachodzi

$$|\alpha - \frac{a}{q}| \leq \frac{1}{qX} \leq \frac{1}{X} = \frac{\min\limits_{(a,q) \in A} |\alpha - \frac{a}{q}|}{2} < \min_{(a,q) \in A} |\alpha - \frac{a}{q}|.$$

Z powyższych nierówności wynika, że $(a,q) \notin A$, to natomiast daje sprzeczność z definicją zbioru A, zatem A musi mieć nieskończenie wiele elementów. $\square$

Lemat 2.4. *Niech $X, Y \in \mathbb{R}$, gdzie $X \geq 1, Y \geq 1$. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ponadto $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$ będą liczbami takimi, że zachodzi $(a,q) = 1$ oraz $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$, wówczas prawdziwa jest poniższa nierówność*

$$\sum_{1 \leq x \leq X} \min(Y, ||\alpha x + \beta||^{-1}) \leq \big(\frac{X}{\lfloor q/2 \rfloor} + 1\big)(Y + 4q\log(q/2) + 4q).$$

Dowód. Niech $\theta = \alpha - \frac{a}{q}$. Rozważmy dowolne różne liczby $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, takie że $|n_1 - n_2| \leq \frac{q}{2}$, wówczas korzystając z faktu 1.1 otrzymujemy

$$||\alpha n_1 + \beta - (\alpha n_2 + \beta)|| = ||\alpha(n_1 - n_2)|| \geq \big|\big|\frac{a(n_1 - n_2)}{q}\big|\big| - ||(n_1 - n_2)\theta||.$$

Ponieważ $0 < |n_1 - n_2| \leq q/2$ to zachodzi $q \nmid n_1 - n_2$, ponadto $(a,q) = 1$, stąd mamy

$$\big|\big|\frac{a(n_1 - n_2)}{q}\big|\big| - ||(n_1 - n_2)\theta|| \geq \big|\big|\frac{a(n_1 - n_2)}{q}\big|\big| - |n_1 - n_2||\theta| \geq \frac{1}{q} - \frac{q/2}{q^2} = \frac{1}{2q}.$$

Stąd wynika że dla $Z \in \mathbb{N}$ oraz dla różnych $n_1, n_2 \in \{Z, Z+1, ..., Z + \lfloor q/2 \rfloor\}$ liczby $\alpha n_1 + \beta, \alpha n_2 + \beta$, modulo 1 są odległe od siebie o conajmniej $1/2q$, co pociąga za sobą poniższe szacowania

$$\sum_{1 \leq x \leq X} \min(Y, ||\alpha x + \beta||^{-1}) \leq \sum_{0 \leq k \leq \frac{\lfloor X \rfloor}{\lfloor q/2 \rfloor}} \sum_{u=1}^{\lfloor q/2 \rfloor} \min(Y, ||\alpha(k\lfloor q/2 \rfloor + u) + \beta||^{-1})$$

$$\leq \sum_{0 \leq k \leq \frac{\lfloor X \rfloor}{\lfloor q/2 \rfloor}} (Y + \sum_{0 < |r| \leq \lfloor q/2 \rfloor} \big|\frac{r}{2q}\big|^{-1}) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{\lfloor X \rfloor}{\lfloor q/2 \rfloor}} (Y + 4q \sum_{r=1}^{\lfloor q/2 \rfloor} \frac{1}{r})$$

$$\leq (\frac{\lfloor X \rfloor}{\lfloor q/2 \rfloor} + 1)(Y + 4q(\log(\lfloor q/2 \rfloor) + 1)) \leq (\frac{X}{\lfloor q/2 \rfloor} + 1)(Y + 4q\log(q/2) + 4q).$$

$\square$

Lemat 2.5. *(Nierówność Weyl'a) Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz liczby $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ spełniają $(a,q) = 1$,$q \geq 2$ oraz $|\alpha - a/q| \leq q^{-2}$. Wówczas zachodzi poniższa nierówność*

$$|f(\alpha)| \leq \sqrt{P + 2\big(\frac{2P}{\lfloor q/2 \rfloor} + 1\big)(P + 4q\log(q/2) + 4q)}. \tag{2.2}$$

Dowód.

$$|f(\alpha)|^2 = \Big(\sum_{1\le x\le P} e(\alpha x^2)\Big)\cdot\overline{\Big(\sum_{1\le y\le P} e(\alpha y^2)\Big)} = \sum_{1\le x\le P}\sum_{1\le y\le P} e(\alpha(x^2-y^2)) =$$

$$= \sum_{|h|<P}\sum_{\substack{1\le y\le P\\ 1\le y+h\le P}} e(\alpha((y+h)^2-y^2)) = \sum_{|h|<P} e(\alpha h^2)\cdot\sum_{\substack{1\le y\le P\\ 1\le y+h\le P}} e(2\alpha hy).$$

Stąd korzystając z lematów 2.1, 2.4 otrzymujemy

$$|f(\alpha)|^2 \le \sum_{|h|<P}\Big|\sum_{\max(1,1-h)\le y\le\min(P,P-h)} e(2\alpha hy)\Big| \le$$

$$\sum_{|h|<P}\min(\min(P,P-h)-\max(1,1-h)+1,||2h\alpha||^{-1}) \le$$

$$\sum_{|h|<P}\min(P,||2h\alpha||^{-1}) = P + 2\sum_{1\le h\le P}\min(P,||2h\alpha||^{-1}) \le$$

$$\le P + 2\sum_{1\le n\le 2P}\min(P,||n\alpha||^{-1}) \le P + 2\big(\frac{2P}{\lfloor q/2\rfloor}+1\big)(P+4q\log(q/2)+4q).$$

□

Wniosek 2.6. *Dla $P\ge 3$ zachodzi poniższa nierówność*

$$\sup_{\alpha\in\mathfrak{m}}|f(\alpha)| \le P\sqrt{\frac{331\log(2P)}{P-2}}.$$

Dowód. Rozważmy dowolne $\alpha\in\mathfrak{m}$, wówczas z lematu 2.2 istnieją liczby $a\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, takie że $(a,q)=1$, $1\le q\le 4P$ oraz zachodzi

$$|\alpha-\frac{a}{q}| \le \frac{1}{4Pq}.$$

Gdyby zachodziłoby $q\le P$, to wówczas $\alpha\in\mathfrak{M}$, co dawałoby by sprzeczność. Zatem $P<q\le 4P$, wtedy z lematu 2.5 zachodzi

$$|f(\alpha)| \le \sqrt{P+2\big(\frac{2P}{\lfloor q/2\rfloor}+1\big)(P+4q\log(q/2)+4q)} \le$$

$$\sqrt{P+2\big(\frac{2P}{P/2-1}+1\big)(P+16P\log(2P)+16P)} \le$$

$$\sqrt{P+66\cdot\frac{5P-2}{P-2}\cdot P\log(2P)} \le \sqrt{331\cdot\frac{P}{P-2}\cdot P\log(2P)}.$$

□

Lemat 2.7. *Dla $k \geq 3$ zachodzi poniższe oszacowanie*

$$d(k) \leq k^{\frac{9\log(2)}{\log\log(k)}}$$

Dowód. Rozważmy $k \geq 3$, niech $\varepsilon = \frac{5\log(2)}{\log\log k}$, wówczas mamy

$$\frac{d(k)}{k^\varepsilon} = \prod_{p^a || k} \frac{d(p^a)}{p^{a\varepsilon}} = \prod_{\substack{p^a||k \\ p<2^{1/\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} \cdot \prod_{\substack{p^a||k \\ p\geq 2^{1/\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}},$$

dla iloczynu po prawej prawdziwa jest poniższa nierówność

$$\prod_{\substack{p^a||k \\ p\geq 2^{1/\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} \leq \prod_{\substack{p^a||k \\ p\geq 2^{1/\varepsilon}}} \frac{2^a}{p^{a\varepsilon}} \leq 1.$$

Ponadto zachodzi $p^{a\varepsilon} \geq 2^{a\varepsilon} = e^{a\varepsilon\log(2)} \geq a\varepsilon\log(2)$,co daje

$$\prod_{\substack{p^a||k \\ p<2^{1/\varepsilon}}} \frac{a+1}{p^{a\varepsilon}} \leq \prod_{\substack{p^a||k \\ p<2^{1/\varepsilon}}} (1+\frac{a}{p^{a\varepsilon}}) \leq$$

$$\leq \prod_{\substack{p^a||k \\ p<2^{1/\varepsilon}}} (1+\frac{a}{a\varepsilon\log(2)}) \leq \prod_{p<2^{1/\varepsilon}} (1+\frac{1}{\varepsilon\log(2)}) \leq e^{\frac{1}{\varepsilon\log(2)}\cdot 2^{1/\varepsilon}}.$$

Zauważmy, że $\varepsilon = \frac{5\log(2)}{\log\log k} \implies 2^{1/\varepsilon} = \log(k)^{1/5}$, stąd mamy

$$\frac{1}{\varepsilon\log(2)} \cdot 2^{1/\varepsilon} = \frac{\log(k)^{1/5}\log\log(k)}{5\log(2)^2},$$

ponieważ $k \geq 3$, to zachodzą poniższe nierówności

$$\log(\log(k))^2 = \frac{25}{4}\log(\log(k)^{2/5})^2 \leq \frac{25}{4}\log(k)^{4/5} \leq 20\log(2)^3\log(k)^{4/5},$$

co implikuje

$$\frac{\log(k)^{1/5}\log\log(k)}{5\log(2)^2} \leq \frac{4\log(2)\log(k)}{\log\log(k)}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$d(k) \leq k^\varepsilon \cdot e^{\frac{\log(k)^{1/5}\log\log(k)}{5\log(2)^2}} \leq k^{\frac{9\log(2)}{\log\log(k)}}.$$

□

Uwaga 2.8. Szacowanie w lemacie 2.7 jest dalekie od optymalnego, natomiast pokazuje, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{k\to\infty} \frac{d(k)}{k^{\varepsilon}} = 0.$$

Definicja 2.9. Dla $x \in \mathbb{R}, x \geq 1$ niech

$$D(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}, k\leq x} d(k).$$

Ponieważ funkcja $\frac{\log(x)}{\log(\log(x))}$ jest od pewnego miejsca rosnąca, to z lematu 2.7 da się wywnioskować, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ zachodzi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{D(x)}{x^{\varepsilon}} = 0.$$

Lemat 2.10. *(Nierówność Hua) Dla $P \geq 3$ zachodzi*

$$\int_0^1 |f(\alpha)|^4 \, d\alpha \leq P^2(1 + D(P^2)).$$

Dowód. Zauważmy, że prawdziwa jest poniższa równość

$$|f(\alpha)|^2 = f(\alpha) \cdot f(-\alpha) = \sum_{1\leq x,y\leq P} e(\alpha(x^2 - y^2)) = \sum_h b_h e(\alpha h),$$

gdzie $b_h = \#\{1 \leq x, y \leq P : x^2 - y^2 = h\}$ Ponieważ $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ oraz $x + y > 0$ dla $x, y \in [1, P]$, to zachodzi $b_h \leq d(|h|)$, ponadto $b_h = 0$ dla $|h| > P^2$. Stąd mamy

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(\alpha)|^4 \, d\alpha &= \sum_h b_h \cdot b_{-h} = b_0^2 + \sum_{h\neq 0} b_h b_{-h} \leq b_0^2 + \sum_{h\neq 0} b_h d(|h|) \\
&\leq \lfloor P \rfloor^2 + D(P^2) \cdot \sum_{h\neq 0} b_h \leq P^2 + D(P^2) \cdot \sum_h b_h \\
&= P^2 + D(P^2) \cdot |f(0)|^2 \leq P^2(1 + D(P^2)).
\end{aligned}$$

□

Wniosek 2.11. *(Zastosowanie lematów do małych łuków) Dla $J \geq 0$ oraz $t > 4 + 2J$ zachodzi*

$$\int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^t \, d\alpha \leq P^{t-2} \Big(\frac{331 \log(2P)}{P-2}\Big)^{\frac{t-4}{2}} (1 + D(P^2)).$$

Dowód. Korzystając z wniosku 2.6 oraz lematu 2.10 otrzymujemy

$$\int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^t \, d\alpha \leq \sup_{\alpha \in \mathfrak{m}} |f(\alpha)|^{t-4} \cdot \int_0^1 |f(\alpha)|^4 \, d\alpha \leq \left(P\sqrt{\frac{331 \log(2P)}{P-2}}\right)^{t-4} \cdot P^2(1+D(P^2)).$$

□

Uwaga 2.12. Dla liczb t, J spełniających założenia wniosku 2.11 zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P^{t-2}\left(\frac{331\log(2P)}{P-2}\right)^{\frac{t-4}{2}}(1+D(P^2))}{P^{t-2-J}} = 0.$$

Powyższy wniosek oraz uwaga pozwalają ,przy szacowaniu $R_s(n)$ ze wzoru (1.4), skupić się na oszacowaniu wartości całki

$$\int_{\mathfrak{M}} f(\alpha)^s e(-n\alpha) \, d\alpha.$$

3 Wstępne manewry

Niech

$$R_s^*(n) = \#\{(x_1, x_2, ..., x_s) \in \mathbb{Z}^s : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_s^2 = n\}.$$

Powinno być jasne, że $R_s^*(n)$ jest równe około $2^s R_s(n)$, natomiast dokładną zależność miedzy tymi dwiema wielkościami przedstawia poniższy lemat.

Lemat 3.1. *Prawdziwe są poniższe dwie równości*

$$R_s^*(n) = \sum_{r=0}^{s} 2^{s-r}\binom{s}{r} R_{s-r}(n) \tag{3.1}$$

$$R_s(n) = 2^{-s}\sum_{r=0}^{s}(-1)^r\binom{s}{r} R_{s-r}^*(n) \tag{3.2}$$

Dowód. Rożważmy liczbę reprezentacji n jako sumę s kwadratów liczb całkowitych, niech wśród tych s liczb dokładnie r z nich będzie równe 0, wówczas miejsca na których występują zera możemy wybrać na $\binom{s}{r}$ sposobów, następnie dla pozostałych $s-r$ niezerowych liczb na 2 sposoby możemy wybrać znak każdej z nich, ponadto istnieje dokładnie $R_{s-r}(n)$ sposobów na wybór $s-r$ uporządkowanych liczb naturalnych, których kwadraty sumują się do n, to udowadnia równość (3.1).

Korzystając z równości (3.1) otrzymujemy

$$2^{-s}\sum_{r=0}^{s}(-1)^r\binom{s}{r}R^*_{s-r}(n) = 2^{-s}\sum_{r=0}^{s}(-1)^r\binom{s}{r}\cdot\Big(\sum_{l=0}^{s-r}2^{s-r-l}\binom{s-r}{l}R_{s-r-l}(n)\Big)$$

$$= \sum_{r=0}^{s}\sum_{l=0}^{s-r}(-1)^r\binom{s}{r}\cdot 2^{-r-l}\binom{s-r}{l}R_{s-r-l}(n)$$

$$= \sum_{u=0}^{s}\sum_{l=0}^{u}(-1)^{u-l}\binom{s}{u-l}\cdot 2^{-u}\binom{s-(u-l)}{l}R_{s-u}(n).$$

$$= \sum_{u=0}^{s}2^{-u}\binom{s}{u}R_{s-u}(n)\sum_{l=0}^{u}(-1)^{u-l}\binom{u}{l} = R_s(n)$$

W trzeciej równości zastosowaliśmy podstawienie $u = r + l$, w ostatniej równości skorzystaliśmy z faktu, że zachodzi

$$\binom{s}{u-l}\binom{s-(u-l)}{l} = \binom{s}{u}\binom{u}{l}.$$

□

Przekonamy się, że aby udowodnić wzór (0.3) wystarczy uzyskać asymptotyczne rozwinięcie $R^*_t(n)$ dla odpowiednio dużych t, dokładniej będzie to sformułowane we wniosku 3.6.

Definicja 3.2. Definiujemy funkcję $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ poniższym wzorem

$$h(\alpha) = \sum_{|x|\le P} e(\alpha x^2).$$

Definicja 3.3. Dla $\mathfrak{B} \subset [0,1)$ mierzalnego zbioru niech

$$R^*_t(n;\mathfrak{B}) = \int_{\mathfrak{B}} h(\alpha)^t e(-n\alpha)\,d\alpha.$$

Zauważmy, że wówczas zachodzi

$$R^*_t(n) = R^*_t(n;\mathfrak{M}) + R^*_t(n;\mathfrak{m}). \tag{3.3}$$

Uwaga 3.4. Porównując defincje 1.5 oraz 3.2 łatwo można zauważyć, że dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$h(\alpha) = 1 + 2f(\alpha).$$

Lemat 3.5. *Załóżmy, że $J \geq 0$, $s \geq J+3$. Wtedy dla $0 \leq t \leq s-J-3$ zachodzi*

$$\left|R_t^*(n;[0,1))\right| \leq (1+2P)^{s-J-3}. \tag{3.4}$$

Jeśli natomiast zachodzi $s > 4+2J$ oraz $s-2-J \leq t \leq s$, to wtedy

$$\left|R_t^*(n;\mathfrak{m})\right| = o(P^{s-2-J}) \leq 2^s + 4^s \cdot P^{s-2}\Big(\frac{331\log(2P)}{P-2}\Big)^{\frac{s-4}{2}}(1+D(P^2)). \tag{3.5}$$

Dowód. Pierwsza nierówność wynika z szacowania $|h(\alpha)| \leq 1+2|f(\alpha)| \leq 1+2P$. Gdy natomiast zakładamy, że $s > 4+2J$ oraz $s-2-J \leq t \leq s$, to z nierówności Höldera otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|R_t^*(n;\mathfrak{m})\right| &\leq \int_{\mathfrak{m}} |h(\alpha)|^t \, d\alpha \leq \Big(\int_{\mathfrak{m}} |h(\alpha)|^s \, d\alpha\Big)^{t/s}\Big(\int_{\mathfrak{m}} d\alpha\Big)^{1-t/s} \\ &\leq \int_{\mathfrak{m}} |h(\alpha)|^s \, d\alpha \leq \int_{\mathfrak{m}} (1+2|f(\alpha)|)^s \, d\alpha \\ &\leq 2^s + 4^s \cdot \int_{\mathfrak{m}} |f(\alpha)|^s \, d\alpha \leq 2^s + 4^s \cdot P^{s-2}\Big(\frac{331\log(2P)}{P-2}\Big)^{\frac{s-4}{2}}(1+D(P^2)).\end{aligned}$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z wniosku 2.11, natomiast w przedostaniej skorzystaliśmy z oszacowania $(a+b)^s \leq 2^s(a^s+b^2)$ dla $a,b>0$. □

Wniosek 3.6. *Dla $s > 2J+4$ zachodzi*

$$R_s(n) = 2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R_{s-r}^*(n;,\mathfrak{M}) + o(P^{s-2-J}) \tag{3.6}$$

gdzie

$$|o(P^{s-2-J})| \leq (1+2P)^{s-J-3} + \Big(\sum_{r=0}^{J+2}\binom{s}{r}\Big)\cdot\Big(1+2^s\cdot P^{s-2}\Big(\frac{331\log(2P)}{P-2}\Big)^{\frac{s-4}{2}}(1+D(P^2))\Big).$$

Dowód. Z równości (3.2) oraz (3.4) zachodzi

$$R_s(n) = 2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R_{s-r}^*(n) + 2^{-s}\sum_{r=J+3}^{s}(-1)^r\binom{s}{r}R_{s-r}^*(n)$$

gdzie

$$\left|2^{-s}\sum_{r=J+3}^{s}(-1)^r\binom{s}{r}R_{s-r}^*(n)\right| \leq 2^{-s}\sum_{r=J+3}^{s}\binom{s}{r}(1+2P)^{s-J-3} \leq (1+2P)^{s-J-3}.$$

Ponadto mamy

$$2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R^*_{s-r}(n) = 2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R^*_{s-r}(n;\mathfrak{M})+2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R^*_{s-r}(n;\mathfrak{m}),$$

natomiast z (3.5) zachodzi

$$\Big|2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R^*_{s-r}(n;\mathfrak{m})\Big| \le 2^{-s}\cdot\Big(\sum_{r=0}^{J+2}\binom{s}{r}\Big)\cdot\Big(2^s+4^s\cdot P^{s-2}\Big(\frac{331\log(2P)}{P-2}\Big)^{\frac{s-4}{2}}(1+D(P^2))\Big).$$

$\square$

4 Wkład dużych łuków

4.1 Klasyczne definicje i lematy

Naszym pierwszysm krokiem w analizie wyrazów $R^*_{s-r}(n;,\mathfrak{M})$ będzie zastąpienie funkcji $h(\alpha)$, podanej w definicji 3.2, przez jej odpowiednie przybliżenie, to natomiast wymaga pewnego przygotowania.

Definicja 4.1. Dla $a, b \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$S(q,a,b) = \sum_{x=1}^{q} e(\frac{ax^2+bx}{q}). \tag{4.1}$$

Będziemy przyjmować $S(q,a) = S(q,a,0)$. Dla $\beta \in \mathbb{R}$ zdefiniujemy

$$v(\beta) = \int_0^P e(\beta\gamma^2)\ d\gamma. \tag{4.2}$$

Ponadto dla $\alpha \in \mathfrak{M}$

$$f^*(\alpha) = q^{-1}S(q,a)v(\alpha - a/q) \quad \text{gdy } \alpha \in \mathfrak{M}(q,a)\ . \tag{4.3}$$

Lemat 4.2. *Dla $a, b \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, takich że $(a,q) = 1$ zachodzi*

$$|S(q,a,b)| \le \sqrt{(2,q)q} \le \sqrt{2q}$$

Dowód. Zauważmy, że dla $t \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{x=1}^{q} e(tx/q) = \begin{cases} q & \text{gdy } q \mid t \\ 0 & \text{gdy } q \nmid t \end{cases}\ .$$

Stąd otrzymujemy

$$|S(q,a,b)|^2 = S(q,a,b)\cdot\overline{S(q,a,b)} = \sum_{y=1}^{q}\sum_{x=1}^{q} e\Big(\frac{a(x^2-y^2)+b(x-y)}{q}\Big)$$

$$= \sum_{y=1}^{q}\sum_{h=1-y}^{q-y} e\Big(\frac{a(y+h)^2-ay^2+bh}{q}\Big) = \sum_{y=1}^{q}\sum_{h=1}^{q} e\big(\frac{ah^2+bh}{q}\big)\cdot e\big(\frac{2ahy}{q}\big)$$

$$= \sum_{h=1}^{q} e\big(\frac{ah^2+bh}{q}\big)\sum_{y=1}^{q} e\big(\frac{2ahy}{q}\big) = \sum_{\substack{h=1\\ q|2h}}^{q} e\big(\frac{ah^2+bh}{q}\big)\cdot q.$$

Zmiana przedziałów sumowania w trzeciej równości wynika z faktu, że dla $h \equiv h' \pmod q$ mamy

$$e\Big(\frac{a(y+h)^2-ay^2+bh}{q}\Big) = e\Big(\frac{a(y+h')^2-ay^2+bh'}{q}\Big).$$

Stąd wynika, że

$$|S(q,a,b)|^2 \le \sum_{\substack{h=1\\ q|2h}}^{q} q = (2,q)q.$$

□

Lemat 4.3. *Załóżmy, że $X < Y$, F jest funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na $[X,Y]$, taką że F'' istnieje i jest ciągła na $[X,Y]$ oraz F' jest monotoniczna na $[X,Y]$. Niech H_1, H_2 będą liczbami całkowitymi,takami że $H_1 \le F'(\alpha) \le H_2$ dla każdego $\alpha \in [X,Y]$. Wówczas zachodzi*

$$\sum_{X<x\le Y} e(F(x)) = \sum_{h=H_1}^{H_2}\int_X^Y e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha + O(\log(H+1)+1)$$

gdzie $H = \max(|H_1|,|H_2|)$ oraz

$$|O(\log(H+1)+1)| \le 9\log(H+1)+11.$$

Dowód. Dla różniczkowalnej funkcji ψ z ciągłą pochodną zachodzi wzór Eulera-Maclaurina [6] (Theorem B.5)

$$\sum_{X<x\le Y}\psi(x) = \int_X^Y \psi(\alpha)\ d\alpha - \psi(Y)(Y-\lfloor Y\rfloor - \frac{1}{2})$$

$$+\psi(X)(X-\lfloor X\rfloor-\frac{1}{2})+\int_X^Y \psi'(\alpha)(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor-\frac{1}{2})\ d\alpha.$$

Stąd otrzymujemy

$$\Big|\sum_{X<x\le Y} e(F(x))-\int_X^Y e(F(\alpha))\ d\alpha-\int_X^Y 2\pi i F'(\alpha)e(F(\alpha))(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor-\frac{1}{2})\ d\alpha\Big|$$

$$=|-e(F(Y))(Y-\lfloor Y\rfloor-\frac{1}{2})+e(F(X))(X-\lfloor X\rfloor-\frac{1}{2})|\le 1.$$

Przypomnijmy sobie z klasycznej teorii szeregów Fouriera, że dla wszystkich $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ zachodzi poniższy wzór

$$\alpha-\lfloor\alpha\rfloor-\frac{1}{2}=\sum_{\substack{h=-\infty\\ h\neq 0}}^{\infty}\frac{e(-\alpha h)}{2\pi i h},$$

ponadto mamy

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R},N\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{\substack{h=-N\\ h\neq 0}}^{N}\frac{e(-\alpha h)}{2\pi i h}\Big|<\infty.$$

Wówczas z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej ptrzymujemy

$$\int_X^Y 2\pi i F'(\alpha)e(F(\alpha))(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor-\frac{1}{2})\ d\alpha=\sum_{\substack{h=-\infty\\ h\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{h}\int_X^Y F'(\alpha)e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha.$$

Gdy zachodzi $h>H_2$ lub $h<H_1$, to funkcja $F'(\alpha)-h$ jest niezerowa i monotoniczna na przedziale $[X,Y]$. Dlatego funkcja $\frac{F'(\alpha)}{F'(\alpha)-h}$ jest również monotoniczna na $[X,Y]$. Stąd całkując przez części otrzymujemy

$$\Big|\int_X^Y F'(\alpha)e(F(\alpha)-h\alpha)\ d\alpha\Big|=\Big|\int_X^Y \frac{F'(\alpha)}{2\pi i(F'(\alpha)-h)}\cdot 2\pi i(F'(\alpha)-h)e(F(\alpha)-h\alpha)\ d\alpha\Big|$$

$$=\Big|\frac{F'(\alpha)}{2\pi i(F'(\alpha)-h)}e(F(\alpha)-h\alpha)\Big|_{\alpha=X}^{\alpha=Y}-\int_X^Y \frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{F'(\alpha)}{2\pi i(F'(\alpha)-h)}\Big)\cdot e(F(\alpha)-h\alpha)\ d\alpha\Big|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\Big(\Big|\frac{F'(X)}{F'(X)-h}\Big|+\Big|\frac{F'(Y)}{F'(Y)-h}\Big|+\int_X^Y\Big|\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{F'(\alpha)}{F'(\alpha)-h}\Big)\Big|\ d\alpha\Big)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\Big(\Big|\frac{F'(X)}{F'(X)-h}\Big|+\Big|\frac{F'(Y)}{F'(Y)-h}\Big|+\Big|\int_X^Y\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{F'(\alpha)}{F'(\alpha)-h}\Big)\ d\alpha\Big|\Big)$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\Big(\Big|\frac{F'(X)}{F'(X)-h}\Big| + \Big|\frac{F'(Y)}{F'(Y)-h}\Big|\Big).$$

Równość $\int_X^Y \Big|\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{F'(\alpha)}{F'(\alpha)-h}\Big)\Big|\ d\alpha\ =\ \Big|\int_X^Y \frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{F'(\alpha)}{F'(\alpha)-h}\Big)\ d\alpha\Big|$ jest uzasadniona faktem, że funkcja $F'(\alpha)/(F'(\alpha)-h)$ jest monotoniczna na przedziale $[X,Y]$, zatem jej pochodna nie zmienia znaku na $[X,Y]$.Ponieważ dla $\alpha \in [X,Y]$ jest prawdą, że

$$\Big|\frac{F'(\alpha)}{(F'(\alpha)-h)}\Big| \leq \max\Big(\frac{|H_2|}{|h-H_2|}, \frac{|H_1|}{|h-H_1|}\Big) \leq \frac{|H_2|}{|h-H_2|} + \frac{|H_1|}{|h-H_1|},$$

stąd otrzymujemy poniższe oszacowania

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\h\neq 0}}^{\infty} \Big|\frac{1}{h}\int_X^Y F'(\alpha)e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha\Big| \leq \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{h=H_2+1\\h\neq 0}}^{\infty}\frac{1}{|h|}\Big(\Big|\frac{F'(X)}{F'(X)-h}\Big|+\Big|\frac{F'(Y)}{F'(Y)-h}\Big|\Big)$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{h=H_2+1\\h\neq 0}}^{\infty}\Big(\frac{|H_2|}{|h||h-H_2|}+\frac{|H_1|}{|h||h-H_1|}\Big) = \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{h=H_2+1\\h\neq 0}}^{\infty}\Big(\frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)}+\frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)}\Big).$$

Zachodzi poniższa równość

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\h>0}}^{\infty}\frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} = \lim_{N\to\infty}\frac{|H_2|}{H_2}\Big(\sum_{\substack{h=H_2+1\\h>0}}^{N}\frac{1}{h-H_2} - \frac{1}{h}\Big).$$

Jeśli $H_2 \geq 0$, to

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\h\neq 0}}^{\infty}\frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} = \lim_{N\to\infty}\frac{|H_2|}{H_2}\Big(\sum_{\substack{h=H_2+1\\h>0}}^{N}\frac{1}{h-H_2}-\frac{1}{h}\Big) = \lim_{N\to\infty}\sum_{h=1}^{N-H_2}\frac{1}{h}-\sum_{h=H_2+1}^{N}\frac{1}{h}$$

$$= \sum_{h=1}^{H_2}\frac{1}{h} - \lim_{N\to\infty}\sum_{h=N-H_2+1}^{N}\frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{H_2}\frac{1}{h} \leq \log(H+1)+1.$$

Jeśli natomiast $H_2 < 0$, to

$$\lim_{N\to\infty}\frac{|H_2|}{H_2}\Big(\sum_{\substack{h=H_2+1\\h>0}}^{N}\frac{1}{h-H_2} - \frac{1}{h}\Big) = \lim_{N\to\infty}\sum_{h=1}^{N}\frac{1}{h} - \sum_{\substack{h=1\\h>-H_2}}^{N-H_2}\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{h=1}^{N} \frac{1}{h} - \sum_{h=-H_2+1}^{N-H_2} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{-H_2} \frac{1}{h} - \lim_{N\to\infty} \sum_{h=N+1}^{N-H_2} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{-H_2} \frac{1}{h} \leq \log(H+1)+1.$$

Ponadto dla $H_2 < 0$ mamy

$$\sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h<0}}^{\infty} \frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} = \sum_{h=H_2+1}^{-1} \frac{-H_2}{-h(h-H_2)} = \sum_{h=H_2+1}^{-1} \frac{1}{h-H_2} - \frac{1}{h}$$

$$= \sum_{h=1}^{-H_2-1} \frac{1}{h} - \sum_{h=H_2+1}^{-1} \frac{1}{h} = 2 \sum_{h=1}^{-H_2-1} \frac{1}{h} \leq 2(\log(H+1)+1).$$

Ostatecznie dla wszystkich H_2 mamy

$$\sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h\neq 0}}^{\infty} \frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} = \sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h>0}}^{\infty} \frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} + \sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h<0}}^{\infty} \frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} \leq 3(\log(H+1)+1).$$

Teraz rozważmy drugi szereg

$$\sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h\neq 0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} = \sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h>0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} + \sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h<0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)}.$$

Pierwsza suma wynosi

$$\frac{|H_1|}{H_1} \cdot \sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h>0}}^{\infty} \frac{1}{h-H_1} - \frac{1}{h} = \lim_{N\to\infty} \frac{|H_1|}{H_1} \Big(\sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h>0}}^{N} \frac{1}{h-H_1} - \frac{1}{h} \Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{|H_1|}{H_1} \Big(\sum_{\substack{h=H_2-H_1+1 \\ h>-H_1}}^{N-H_1} \frac{1}{h} - \sum_{\substack{h=H_2+1 \\ h>0}}^{N} \frac{1}{h} \Big).$$

Jeśli $H_1 \geq 0$. to wtedy też $H_2 \geq 0$ oraz powyższe wyrażenie jest równe

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{h=H_2-H_1+1}^{N-H_1} \frac{1}{h} - \sum_{h=H_2+1}^{N} \frac{1}{h} = \sum_{h=H_2-H_1+1}^{H_2} \frac{1}{h} - \lim_{N\to\infty} \sum_{h=N-H_1+1}^{N} \frac{1}{h}$$

$$= \sum_{h=H_2-H_1+1}^{H_2} \frac{1}{h} \leq \log(H+1)+1.$$

Jeśli natomiast $H_1 < 0$,to wtedy

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\ h>0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} = \lim_{N\to\infty} \frac{|H_1|}{H_1}\Big(\sum_{\substack{h=H_2-H_1+1\\ h>-H_1}}^{N-H_1} \frac{1}{h} - \sum_{\substack{h=H_2+1\\ h>0}}^{N} \frac{1}{h}\Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{h=\max(H_2+1,1)}^{N} \frac{1}{h} - \sum_{h=\max(H_2-H_1+1,-H_1+1)}^{N-H_1} \frac{1}{h}$$

$$= \sum_{h=\max(H_2+1,1)}^{\max(H_2-H_1+1,-H_1+1)-1} \frac{1}{h} - \lim_{N\to\infty} \sum_{h=N+1}^{N-H_1} \frac{1}{h}$$

$$\leq \sum_{h=1}^{\max(H_2-H_1+1,-H_1+1)-\max(H_2+1,1)} \frac{1}{h} = \sum_{h=1}^{-H_1} \frac{1}{h} \leq \log(H+1)+1.$$

Ponadto dla $H_1 < 0$ oraz $H_2 < 0$ (gdy $H_2 \geq 0$,to $\sum\limits_{\substack{h=H_2+1\\ h<0}}^{\infty} \dfrac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} = 0$)

mamy

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\ h<0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} = \sum_{h=H_2+1}^{-1} \frac{-H_1}{-h(h-H_1)} = \sum_{h=H_2+1}^{-1} \frac{1}{h-H_1} - \frac{1}{h}$$

$$= \sum_{h=H_2-H_1+1}^{-H_1-1} \frac{1}{h} + \sum_{h=1}^{-H_2-1} \frac{1}{h} \leq 2(\log(H+1)+1).$$

Ostatecznie dla wszystkich H_1 mamy

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\ h\neq 0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} = \sum_{\substack{h=H_2+1\\ h>0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} + \sum_{\substack{h=H_2+1\\ h<0}}^{\infty} \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)} \leq 3(\log(H+1)+1).$$

Stąd zachodzi

$$\sum_{\substack{h=H_2+1\\ h\neq 0}}^{\infty} \Big|\frac{1}{h}\int_X^Y F'(\alpha)e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha\Big|$$

$$\leq \frac{2}{\pi}\cdot \sum_{\substack{h=H_2+1\\ h\neq 0}}^{\infty} \Big(\frac{|H_2|}{|h|(h-H_2)} + \frac{|H_1|}{|h|(h-H_1)}\Big) \leq \frac{12}{\pi}(\log(H+1)+1) \leq 4(\log(H+1)+1).$$

Zupełnie analogicznie da się wykazać, że

$$\sum_{\substack{h=-\infty\\ h\neq 0}}^{H_1-1} \Big|\frac{1}{h}\int_X^Y F'(\alpha)e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha\Big| \le 4(\log(H+1)+1).$$

Dla $H_1 \le h \le H_2$, $h \neq 0$ całkując przez części otrzymujemy

$$\int_X^Y \frac{1}{h}F'(\alpha)e(F(\alpha))e(-\alpha h)\ d\alpha = \frac{e(F(\alpha))e(-\alpha h)}{2\pi i h}\Big|_{\alpha=X}^{\alpha=Y} + \int_X^Y e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha,$$

co za sobą pociąga

$$\Big|\sum_{\substack{h=H_1\\ h\neq 0}}^{H_2} \Big(\frac{1}{h}\int_X^Y F'(\alpha)e(F(\alpha))e(-\alpha h)\ d\alpha - \int_X^Y e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha\Big)\Big|$$

$$\le \frac{1}{\pi}\sum_{\substack{h=H_1\\ h\neq 0}}^{H_2} \frac{1}{|h|} \le \frac{2}{\pi}(\log(H+1)+1) \le \log(H+1)+1.$$

Stąd mamy

$$\sum_{X<x\le Y} e(F(x)) = \int_X^Y e(F(\alpha))\ d\alpha + \sum_{\substack{h=H_1\\ h\neq 0}}^{H_2} \int_X^Y e(F(\alpha)-\alpha h)\ d\alpha + O(\log(H+1)+1)$$

gdzie

$$|O(\log(H+1)+1)| \le 1+2\cdot 4(\log(H+1)+1)+(\log(H+1)+1) = 9\log(H+1)+10.$$

Jeśli $H_1 \le 0 \le H_2$ to teza jest udowodniona, jeśli natomiast zachodzi $0 < H_1$ lub $H_2 < 0$, to $|F'(\alpha)| \ge 1$ dla wszystkich $\alpha \in [X,Y]$, wówczas całkując przez cześci otrzymujemy

$$\Big|\int_X^Y e(F(\alpha))\ d\alpha\Big| = \Big|\int_X^Y \frac{1}{2\pi i F'(\alpha)}\cdot 2\pi i F'(\alpha)\cdot e(F(\alpha))\ d\alpha\Big|$$

$$= \Big|\frac{e(F(\alpha))}{2\pi i F'(\alpha)}\Big|_{\alpha=X}^{\alpha=Y} - \frac{1}{2\pi i}\int_X^Y \frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{1}{F'(\alpha)}\Big)\cdot e(F(\alpha))\ d\alpha\Big|$$

$$\le \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\int_X^Y \Big|\frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{1}{F'(\alpha)}\Big)\Big|\ d\alpha = \frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\Big|\int_X^Y \frac{d}{d\alpha}\Big(\frac{1}{F'(\alpha)}\Big)\ d\alpha\Big| \le \frac{2}{\pi} \le 1.$$

Równość $\int_X^Y \left|\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{F'(\alpha)}\right)\right| \, d\alpha = \left|\int_X^Y \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{F'(\alpha)}\right) \, d\alpha\right|$ jest uzasadniona faktem, że funkcja $\frac{1}{F'(\alpha)}$ jest monotoniczna na $[X, Y]$, zatem jej pochodna nie zmienia znaku na tym przedziale, ostatecznie otrzymujemy

$$\sum_{X<x\leq Y} e(F(x)) = \sum_{h=H_1}^{H_2} \int_X^Y e(F(\alpha) - \alpha h) \, d\alpha + O(\log(H+1) + 1)$$

gdzie

$$|O(\log(H+1) + 1)| \leq 9 \log(H+1) + 11.$$

$\square$

Poniższe twierdzenie jest niezwykle ważnym wnioskiem z lematu 4.3.

Twierdzenie 4.4. *Niech $\alpha \in \mathfrak{M}(q, a)$, wówczas zachodzi*

$$|f(\alpha) - f^*(\alpha)| \leq q^{1/2}(38 + 4\log(q)) \leq P^{1/2}(38 + 4\log(P)).$$

Dowód. Niech $\beta = \alpha - \frac{a}{q}$, wówczas mamy $|\beta| \leq \frac{1}{4Pq}$, ponadto korzystając z definicji (4.1) oraz faktu, że dla $t \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\sum_{-q/2<x\leq q/2} e(tx/q) = \begin{cases} q & \text{gdy } q \mid t \\ 0 & \text{gdy } q \nmid t \end{cases}$$

otrzymujemy poniższe równości

$$f(\alpha) = \sum_{1\leq x\leq P} e(\beta x^2) \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv x \pmod q}}^{q} e(\frac{am^2}{q})$$

$$= \sum_{1\leq x\leq P} \sum_{m=1}^{q} e(\beta x^2) e(\frac{am^2}{q}) \cdot q^{-1} \sum_{-q/2<b\leq q/2} e(\frac{b(m-x)}{q}) = q^{-1} \sum_{-q/2<b\leq q/2} S(q, a, b) F(b)$$

gdzie

$$F(b) = \sum_{1\leq x\leq P} e(\beta x^2 - bx/q).$$

Gdy zachodzi $-q/2 \leq b \leq q/2$ to wyrażenie $2\beta\gamma - b/q$ jest monotoniczną funkcją zmiennej γ na przedziale $[0, P]$, ponadto leży między liczbami $-2|\beta|P - \frac{1}{2}$ oraz $2|\beta|P + \frac{1}{2}$. Tak więc stosując lemat 4.3 dla $H_1 = -H_2 = -H$, gdzie $H = \lfloor 2|\beta|P + \frac{3}{2} \rfloor \leq 2$ otrzymujemy

$$F(b) = \sum_{h=-H}^{H} I(b + hq) + O(\log(H+1) + 1)$$

gdzie
$$I(c) = \int_0^P e(\beta\gamma^2 - c\gamma/q)\ d\gamma$$
oraz błąd spełnia oszacowanie podane w tezie lematu 4.3. Korzystając z poprzednich równości oraz lematu 4.2 otrzymujemy

$$f(\alpha) = q^{-1} \sum_{-q/2<b\le q/2} S(q,a,b) \cdot \sum_{h=-H}^{H} I(b+hq) + O(q^{1/2}(\log(H+1)+1)),$$

przy czym

$$|O(q^{1/2}(\log(H+1)+1))| \le (9\log(H+1)+11)q^{-1} \sum_{-q/2<b\le q/2} |S(q,a,b)|$$

$$\le (9\log(H+1)+11)q^{-1} \sum_{-q/2<b\le q/2} \sqrt{2q} = \sqrt{2q}(9\log(H+1)+11)$$
$$\le q^{1/2}\sqrt{2}(9\log(3)+11) \le 31q^{1/2}.$$
Ponadto dla $b \equiv b' \pmod q$ mamy $S(q,a,b') = S(q,a,b)$, stąd

$$q^{-1} \sum_{-q/2<b\le q/2} \sum_{h=-H}^{H} S(q,a,b)\cdot I(b+hq) = q^{-1} \sum_{-q/2<b\le q/2} \sum_{h=-H}^{H} S(q,a,b+hq)\cdot I(b+hq)$$

$$= q^{-1} \sum_{-B<b\le B} S(q,a,b) \cdot I(b)$$

gdzie $B = (H+\frac{1}{2})q \le \frac{5}{2}q$, stąd

$$f(\alpha) - f^*(\alpha) = q^{-1} \sum_{\substack{-B<b\le B\\ b\ne 0}} S(q,a,b)\cdot I(b) + O(q^{1/2}(\log(H+1)+1)).$$

Natomiast dla $b \ne 0$, dowolnego $\gamma \in [0,P]$ mamy

$$|\frac{b}{q} - 2\beta\gamma| \ge \frac{|b|}{q} - 2|\beta||\gamma| \ge \frac{|b|}{q} - 2\cdot\frac{1}{4Pq}\cdot P \ge \frac{|b|}{2q}.$$

Tak więc całkując przez cześci dla $b \ne 0$ otrzymujemy

$$I(b) = \int_0^P e(\beta\gamma^2 - b\gamma/q)\ d\gamma = \int_0^P \frac{1}{2\pi i(2\beta\gamma - b/q)} \cdot 2\pi i(2\beta\gamma - b/q) e(\beta\gamma^2 - b\gamma/q)\ d\gamma$$

$$= \frac{e(\beta\gamma^2 - b\gamma/q)}{2\pi i(2\beta\gamma - b/q)}\Big|_{\gamma=0}^{\gamma=P} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^P \frac{d}{d\gamma}\Big(\frac{1}{2\beta\gamma - b/q}\Big)e(\beta\gamma^2 - b\gamma/q)\ d\gamma,$$

stąd mamy

$$|I(b)| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\frac{2q}{|b|} + \frac{1}{2\pi}\int_0^P \Big|\frac{d}{d\gamma}\Big(\frac{1}{2\beta\gamma - b/q}\Big)\Big|\ d\gamma$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\frac{2q}{|b|} + \frac{1}{2\pi}\Big|\int_0^P \frac{d}{d\gamma}\Big(\frac{1}{2\beta\gamma - b/q}\Big)\ d\gamma\Big| \le \frac{1}{2\pi}\cdot(2\cdot\frac{2q}{|b|} + 2\cdot\frac{2q}{|b|}) = \frac{4}{\pi}\frac{q}{|b|}.$$

Równość $\int_0^P \left|\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{2\beta\gamma - b/q}\right)\right|\ d\gamma = \left|\int_0^P \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{2\beta\gamma - b/q}\right)\ d\gamma\right|$ jest uzasadniona faktem, że funkcja $\frac{1}{2\beta\gamma - b/q}$ jest monotoniczna ze względu na γ.Zatem z lematu 4.2 zachodzi

$$|q^{-1}\sum_{\substack{-B<b\le B\\ b\ne 0}} S(q,a,b)I(b)| \le \frac{4}{\pi}\cdot\sqrt{2q}\cdot q^{-1}\sum_{\substack{-B<b\le B\\ b\ne 0}}\frac{q}{|b|} \le q^{-1/2}\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cdot 2(\log(B)+1)$$

$$\le \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cdot q^{1/2}(\log(\frac{5}{2}q) + 1) =\le \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cdot q^{1/2}(\log(q) + 1 + \log(\frac{5}{2})).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$|f(\alpha) - f^*(\alpha)| \le q^{1/2}(31 + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\cdot(\log(\frac{5}{2}) + 1) + \frac{8\sqrt{2}}{\pi}\log(q))$$

$$\le q^{1/2}(38 + 4\log(q)).$$

□

Wniosek 4.5. *Dla $\alpha \in \mathfrak{M}$ zachodzi*

$$|h(\alpha) - 2f^*(\alpha)| \le P^{1/2}(77 + 8\log(P)).$$

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 4.4 oraz uwagi 3.4. □

Lemat 4.6. *Dla $\beta \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$|v(\beta)| \le \min(P, |\beta|^{-1/2}).$$

Dowód. Z jednej strony zachodzi

$$|v(\beta)| = \Big|\int_0^P e(\beta\gamma^2)\ d\gamma\Big| \le P$$

powyższa nierówność udowadnia tezę dla $\beta = 0$. Załóżmy najpierw, że $\beta > 0$. Dla $\beta^{-1/2} \geq P$ teza jest prawdziwa z oszacowania wyżej, dlatego załóżmy, że $\beta^{-1/2} < P$. Wtedy

$$v(\beta) = \int_0^P e(\beta\gamma^2)\ d\gamma = \frac{1}{2\beta^{1/2}} \int_0^{\beta P^2} t^{-1/2} e(t)\ dt.$$

Zachodzi $\beta^{-1/2} < P \implies \beta P^2 > 1$, wówczas całkując przez cześci otrzymujemy

$$\int_{1/4}^{\beta P^2} t^{-1/2} e(t)\ dt = \frac{t^{-1/2} e(t)}{2\pi i}\Big|_{t=1/4}^{t=\beta P^2} + \frac{1}{4\pi i} \int_{1/4}^{\beta P^2} t^{-3/2} e(t)\ dt.$$

Powyższa równość implikuje

$$\begin{aligned} \Big| \int_{1/4}^{\beta P^2} t^{-1/2} e(t)\ dt \Big| &\leq \frac{1}{2\pi}(2 + (\beta P^2)^{-1/2}) + \frac{1}{4\pi} \int_{1/4}^{\beta P^2} t^{-3/2}\ dt \\ &\leq \frac{3}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(2 - (\beta P^2)^{-1/2}) \leq \frac{5}{2\pi} \leq 1. \end{aligned}$$

Z drugiej strony zachodzi

$$\Big| \int_0^{1/4} t^{-1/2} e(t)\ dt \Big| \leq \int_0^{1/4} t^{-1/2}\ dt = 1,$$

stąd mamy

$$|v(\beta)| \leq \frac{1}{2\beta^{1/2}} \Big(\Big| \int_0^{1/4} t^{-1/2} e(t)\ dt \Big| + \Big| \int_{1/4}^{\beta P^2} t^{-1/2} e(t)\ dt \Big| \Big) \leq \beta^{-1/2}$$

To udowadnia tezę, gdy $\beta > 0$, natomiast gdy $\beta < 0$, to mamy $|v(\beta)| = |\overline{v(\beta)}| = |v(-\beta)|$. □

Wniosek 4.7. *Dla $\beta \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$|v(\beta)| \leq \sqrt{2} P (1 + P^2 |\beta|)^{-1/2}.$$

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek $|\beta| \leq P^{-2}$, wówczas zachodzi $1 + P^2|\beta| \leq 2$, stąd korzystając z lematu 4.6 otrzymujemy

$$\sqrt{2} P (1 + P^2|\beta|)^{-1/2} \geq \sqrt{2} P 2^{-1/2} = P = \min(P, |\beta|^{-1/2}) \geq |v(\beta)|.$$

Natomiast dla $|\beta| > P^{-2}$ zachodzi $1 + P^2|\beta| \leq 2P^2|\beta|$, stąd korzystając z lematu 4.6 otrzymujemy

$$\sqrt{2} P (1+P^2|\beta|)^{-1/2} \geq \sqrt{2} P (2P^2|\beta|)^{-1/2} = |\beta|^{-1/2} = \min(P, |\beta|^{-1/2}) \geq |v(\beta)|.$$

□

Lemat 4.8. *Zachodzi*

$$\int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^4 \ d\alpha \leq 16P^2(\log(P)+1).$$

Dowód. Korzystając z lematu 1.9 otrzymujemy

$$\int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^4 \ d\alpha = \sum_{1\leq q\leq P} \sum_{\substack{0\leq a\leq q \\ (a,q)=1}} \int_{\mathfrak{M}(q,a)} |q^{-1}S(q,a)v(\alpha - a/q)|^4 \ d\alpha$$

$$= \sum_{1<q\leq P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} |q^{-1}S(q,a)|^4 \int_{\mathfrak{M}(q,a)} |v(\alpha - a/q)|^4 \ d\alpha + \int_{\mathfrak{M}(1,0)} |v(\alpha)|^4 \ d\alpha + \int_{\mathfrak{M}(1,1)} |v(\alpha - 1)|^4 \ d\alpha$$

$$= \sum_{1<q\leq P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} |q^{-1}S(q,a)|^4 \int_{-\frac{1}{4Pq}}^{\frac{1}{4Pq}} |v(\beta)|^4 \ d\beta + \int_{0}^{\frac{1}{4P}} |v(\beta)|^4 \ d\beta + \int_{-\frac{1}{4P}}^{0} |v(\beta)|^4 \ d\beta$$

$$= \sum_{1\leq q\leq P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} |q^{-1}S(q,a)|^4 \int_{-\frac{1}{4Pq}}^{\frac{1}{4Pq}} |v(\beta)|^4 \ d\beta.$$

W powyższych równosciach skorzystaliśmy z lematu 1.10 oraz faktu, że $S(1,0) = S(1,1) = 1$.
Korzystając z lematu 4.2 zachodzą poniższe nierówności

$$\int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^4 \ d\alpha \leq \sum_{1\leq q\leq P} 4q^{-1} \int_{-\frac{1}{4Pq}}^{\frac{1}{4Pq}} |v(\beta)|^4 \ d\beta$$

$$= \sum_{1\leq q\leq P} 8q^{-1} \int_{0}^{\frac{1}{4Pq}} |v(\beta)|^4 \ d\beta \leq \sum_{1\leq q\leq P} 8q^{-1} \int_{0}^{\frac{1}{4Pq}} \min(P, \beta^{-1/2})^4 \ d\beta$$

$$= \sum_{1\leq q\leq P} 8q^{-1} \int_{0}^{\frac{1}{4Pq}} \min(P^4, \beta^{-2}) \ d\beta \leq \sum_{1\leq q\leq P} 8q^{-1} \int_{0}^{\infty} \min(P^4, \beta^{-2}) \ d\beta.$$

Wyżej skorzystaliśmy z lematu 4.6 oraz faktu że $|v(\beta)| = |\overline{v(\beta)}| = |v(-\beta)|$.
Stąd zachodzi

$$\int_{0}^{\infty} \min(P^4, \beta^{-2}) \ d\beta = \int_{0}^{P^{-2}} \min(P^4, \beta^{-2}) \ d\beta + \int_{P^{-2}}^{\infty} \min(P^4, \beta^{-2}) \ d\beta$$

$$= \int_0^{P^{-2}} P^4 \, d\beta + \int_{P^{-2}}^{\infty} \beta^{-2} \, d\beta = P^2 + (-\beta^{-1})\Big|_{\beta=P^{-2}}^{\beta=\infty} = 2P^2,$$

co ostatecznie nam daje

$$\int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^4 \, d\alpha \leq \sum_{1 \leq q \leq P} 8q^{-1} \int_0^{\infty} \min(P^4, \beta^{-2}) \, d\beta \leq 16P^2 \sum_{1 \leq q \leq P} \frac{1}{q} \leq 16P^2(\log(P)+1).$$

□

4.2 Zastosowanie podanych lematów

W tej części przeanalizujemy dokładniej wyrazy, które pojawiają się w równości (3.6). Stosując wzór dwumianowy w defincji 3.3 dla dowolnego $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$ otrzymujemy

$$R_t^*(n; \mathfrak{M}) = \sum_{l=0}^{t} \binom{t}{l} \mathfrak{F}_{t,l}(n) \tag{4.4}$$

gdzie

$$\mathfrak{F}_{t,l}(n) = \int_{\mathfrak{M}} (2f^*(\alpha))^{t-l} (h(\alpha) - 2f^*(\alpha))^l e(-n\alpha) \, d\alpha \tag{4.5}$$

Podejrzane może się wydawać zastosowanie dwumianu Newtona po raz drugi, natomiast motywacja za tym jest ukryta w dowodzie lematu 7.1. Idea polega na tym, że wniosek 4.5 mówi o tym, że funkcja $h(\alpha)$ jest dosyć dobrze przybliżana przez $2f^*(\alpha)$, natomiast to nie oznacza, że dla wszystkich $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkcja $h(\alpha)^t$ może być dobrze aproksymowana przez $(2f^*(\alpha))^t$, dlatego korzystamy ze wzoru (4.4), by z wyrażenia $R_t^*(n; \mathfrak{M})$ wyciągnąć części które będą miały największy wpływ na wzór asymptotyczny w twierdzeniu 1.3.
W dalszych częściach pracy określimy które z wyrazów $\mathfrak{F}_{t,l}(n)$ są mniejszego rzędu wielkości niż pozostałe. Poniższy lemat stosuje wniosek 4.5, aby szacować od góry warotść $|\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)|$ dla odpowiednich liczb s, r, l, to jest część pracy która sprawia, że szacowanie na błąd multiplikatywny w twierdzeinu 1.3 jest tak słabe, będzie to już widoczne w szacowaniu na błąd asymptotyczny we wniosku 4.10.

Lemat 4.9. *Załóżmy, że $J, r \in \mathbb{Z}, J, r \geq 0$. Wówczas dla $s, l \in \mathbb{Z}$ takich, że $l > 2J - 2r$ oraz $s \geq \max(l + r, 2J + 6)$ zachodzi*

$$|\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)| = o(P^{s-2-J})$$

gdzie

$$o(P^{s-2-J}) \leq P^{s-2-J-\frac{1}{2}} \cdot 2^{s-r+4} (4\log(P) + 38.5)^l (\log(P) + 1).$$

Dowód. Załóżmy najpierw, że $s \geq r+l+4$. Stosując szacowanie $|f^*(\alpha)| \leq P$ w równości (4.5) oraz korzystając z wniosku 4.5 i lematu 4.8 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)| &\leq \big(\sup_{\alpha\in\mathfrak{M}} |h(\alpha) - 2f^*(\alpha)|\big)^l \cdot 2^{s-r-l} P^{s-r-l-4} \cdot \int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^4 \, d\alpha \\
&\leq P^{l/2}(77 + 8\log(P))^l \cdot 2^{s-r-l} P^{s-r-l-4} \cdot 16P^2(\log(P)+1) \\
&= P^{s-r-2-l/2} \cdot 2^{s-r-l+4}(77 + 8\log(P))^l(\log(P)+1) \\
&\leq P^{s-2-J-1/2} \cdot 2^{s-r-l+4}(77 + 8\log(P))^l(\log(P)+1).
\end{aligned}$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z faktu, że $l \geq 2J - 2r + 1$, co implikuje $-J-1/2 \geq -r-l/2$. W ten sposób udowodniliśmy lemat dla $s \geq r+l+4$. Teraz wystarczy rozważyć przypadek

$$r + l \leq s \leq r + l + 3$$

Możemy założyc bez zmniejszenia ogólności, że zachodzi $l \geq 2J - 2r + 3$, ponieważ gdybyśmy mieli $l \leq 2J - 2r + 2$, to wówczas

$$s \leq r + l + 3 \leq r + 2J - 2r + 5 \leq 2J + 5$$

co dawałoby sprzeczność z założeniem $s \geq 2J + 6$.
Niech $\omega = \frac{s-r-l}{4} < 1$, korzystając z nierówności Höldera w równości (4.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)| &\leq \big(\sup_{\alpha\in\mathfrak{M}} |h(\alpha) - 2f^*(\alpha)|\big)^l \cdot 2^{s-r-l} \int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^{s-r-l} \, d\alpha \\
&\leq \big(\sup_{\alpha\in\mathfrak{M}} |h(\alpha) - 2f^*(\alpha)|\big)^l \cdot 2^{s-r-l}\Big(\int_{\mathfrak{M}} |f^*(\alpha)|^4 \, d\alpha\Big)^{\omega} \cdot \Big(\int_{\mathfrak{M}} 1 \, d\alpha\Big)^{1-\omega} \\
&\leq P^{l/2}(77 + 8\log(P))^l \cdot 2^{s-r-l} \cdot 16^{\omega} P^{2\omega}(\log(P)+1)^{\omega} \\
&\leq P^{l/2+2\omega} \cdot 2^{s-r-l+4}(77 + 8\log(P))^l(\log(P)+1). \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki.
Najpierw, gdy $l > 2J - 2r + 4$, to z założenia $s \geq l + r$ otrzymujemy

$$l \geq 2J - 2r + 5 \geq 2J - 2r + 5 - 4\omega$$

co implikuje

$$r + \frac{l}{2} + 2\omega \geq J + \frac{5}{2}.$$

Zatem mamy

$$l/2 + 2\omega = s - r - l/2 - 2\omega \leq s - J - \frac{5}{2} = s - 2 - J - \frac{1}{2},$$

stąd z (4.6) wynika, że

$$|\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)| \leq P^{s-2-J-\frac{1}{2}} \cdot 2^{s-r-l+4}(77 + 8\log(P))^l(\log(P) + 1).$$

W przeciwnym przypadku zachodzi

$$2J - 2r + 3 \leq l \leq 2J - 2r + 4.$$

Gdybyśmy mieli $s \leq r + l + 1$, to wtedy

$$s \leq r + l + 1 \leq r + 2J - 2r + 4 + 1 \leq 2J + 5,$$

co dawałoby sprzeczność z założeniem $s \geq 2J + 6$. Stąd mamy $s \geq r + l + 2$, natomiast wtedy

$$l/2 + 2\omega = s - r - l/2 - 2\omega \leq s - r - l/2 - 1 \leq s - 2 - J - \frac{1}{2}.$$

Zatem z (4.6) otrzymujemy

$$|\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)| \leq P^{s-2-J-\frac{1}{2}} \cdot 2^{s-r-l+4}(77 + 8\log(P))^l(\log(P) + 1).$$

$\square$

Wniosek 4.10. *Dla $s \geq 2J + 6$ zachodzi poniższa równość*

$$R_s(n) = 2^{-s} \sum_{r=0}^{J} (-1)^r \binom{s}{r} \sum_{l=0}^{2J-2r} \binom{s-r}{l} \mathfrak{F}_{s-r,l}(n) + o(P^{s-2-J}) \tag{4.7}$$

gdzie

$$|o(P^{s-2-J})| \leq (1+2P)^{s-J-3} + \left(\sum_{r=0}^{J+2} \binom{s}{r}\right) \cdot \left(1 + 2^s \cdot P^{s-2} \left(\frac{331\log(2P)}{P-2}\right)^{\frac{s-4}{2}} (1 + D(P^2))\right)$$

$$+ P^{s-2-J-\frac{1}{2}}(\log(P)+1)(4\log(P)+39.5)^s \cdot \sum_{r=0}^{J+2} \binom{s}{r} 2^{4-r}(4\log(P)+39.5)^{-r}.$$

Dowód. Z równości (3.6) zachodzi

$$R_s(n) = 2^{-s}\sum_{r=0}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}R^*_{s-r}(n;,\mathfrak{M}) + o_1(P^{s-2-J})$$

$$= 2^{-s}\sum_{r=0}^{J}(-1)^r\binom{s}{r}\sum_{l=0}^{2J-2r}\binom{s-r}{l}\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)+o_1(P^{s-2-J})+o_2(P^{s-2-J})+o_3(P^{s-2-J})$$

gdzie $o_1(P^{s-2-J})$ jest błędem z wniosku 3.6, natomiast z lematu 4.9 oraz równości (4.4) mamy

$$|o_2(P^{s-2-J})| = 2^{-s}\Big|\sum_{r=J+1}^{J+2}(-1)^r\binom{s}{r}\sum_{l=0}^{s-r}\binom{s-r}{l}\mathfrak{F}_{s-r,l}(n)\Big|$$

$$\leq P^{s-2-J-\frac{1}{2}}(\log(P)+1)\sum_{r=J+1}^{J+2}\binom{s}{r}2^{4-r}\sum_{l=0}^{s-r}\binom{s-r}{l}(4\log(P)+38.5)^l$$

$$= P^{s-2-J-\frac{1}{2}}(\log(P)+1)(4\log(P)+39.5)^s\sum_{r=J+1}^{J+2}\binom{s}{r}2^{4-r}(4\log(P)+39.5)^{-r}.$$

Ponowonie korzystając z lematu 4.9 oraz równości (4.4) otrzmymujemy

$$|o_3(P^{s-2-J})| = 2^{-s}\Big|\sum_{r=0}^{J}(-1)^r\binom{s}{r}\sum_{l=2J-2r+1}^{s-r}\binom{s-r}{l}\mathfrak{F}_{s-r,l}\Big|$$

$$\leq P^{s-2-J-\frac{1}{2}}(\log(P)+1)\sum_{r=0}^{J}\binom{s}{r}2^{4-r}\sum_{l=2J-2r+1}^{s-r}\binom{s-r}{l}(4\log(P)+38.5)^l$$

$$\leq P^{s-2-J-\frac{1}{2}}(\log(P)+1)\sum_{r=0}^{J}\binom{s}{r}2^{4-r}\sum_{l=0}^{s-r}\binom{s-r}{l}(4\log(P)+38.5)^l$$

$$= P^{s-2-J-\frac{1}{2}}(\log(P)+1)(4\log(P)+39.5)^s\cdot\sum_{r=0}^{J}\binom{s}{r}2^{4-r}(4\log(P)+39.5)^{-r}.$$

$\square$

5 Pomocniczy lemat

Zanim przejdziemy do dalszej analizy wyrazów po prawej stronie równości (4.7) musimy przytoczyć lemat 5.7. Najpierw przypomnimy sobie dwa standardowe narzędzia, zaczynając od wzoru Eulera-Maclaurina.
Liczby Bernoulliego B_κ dla $\kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \geq 0$ są zdefiniowane w następujący sposób $B_0 = 1$,$B_1 = -\frac{1}{2}$, natomiast dla dla $\kappa \geq 2$ spełniony jest poniższy wzór rekurencyjny

$$B_\kappa = \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} B_{\kappa-j}.$$

Wówczas dla $\kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \geq 0$ wielomiany Bernoulliego $B_\kappa(x)$ są określone w poniższy sposób

$$B_\kappa(x) = \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} B_{\kappa-j} x^j,$$

przydatne jest zdefiniowanie funkcji $\beta_\kappa(x) = B_\kappa(\{x\})$.

Lemat 5.1. *(Wzór Eulera-Maclaurina) Niech $a, b \in \mathbb{R}$, gdzie $a < b$, $K \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że funkcja F jest różniczkowalna $K - 1$ razy w sposób ciągły na przedziale $[a, b]$, ponadto niech K- ta pochodna istnieje i jest ciągła na przedziale (a, b). Jeśli funkcja $|F^{(K)}(x)|$ jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, to wówczas zachodzi poniższy wzór*

$$\sum_{a<n\leq b} F(n) = \int_a^b F(x)\ dx + \sum_{\kappa=1}^{K} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa!} \big(\beta_\kappa(b) F^{(\kappa-1)}(b) - \beta_\kappa(a) F^{(\kappa-1)}(a)\big)$$

$$-\frac{(-1)^K}{K!} \int_a^b \beta_K(x) F^{(K)}(x)\ dx.$$

Dowód powyższego lematu jest przedstawiony w [6] (Theorem B.5). Co prawda [6] (Theorem B.5) wymaga założenia że $F^{(K)}$ istnieje i jest ciągła na $[a, b]$, natomiast warto zauważyć, że podany tam dowód działa również w sytuacji, gdy $F^{(K)}$ istnieje i jest ciągła jedynie na (a, b) oraz $|F^{(K)}(x)|$ jest całkowalna na przedziale $[a, b]$.

Uwaga 5.2. Załóżmy, że $0 \leq x \leq 1$. Wówczas dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$|B_k(x)| \leq k! 2^{2-k} \pi^{-k}.$$

Dowód powyższej nierówności jest wnioskiem z [6] (Corollary B.4).

Teraz przypomnijmy sobie wzór Faà di Bruno na N-tą pochodną złożenia.

Lemat 5.3. *Załóżmy, że funckje F, G mają ciągłe N-te pochodne na pewnym otoczeniu punktu $x \in \mathbb{R}$. Wówczas zachodzi*

$$\frac{d^N}{dx^N} F(G(x)) = \sum \frac{N!}{m_1!...m_N!} F^{(m_1+\cdots+m_N)}\big(G(x)\big) \prod_{j=1}^{N} \Big(\frac{G^{(j)}(x)}{j!}\Big)^{m_j}$$

gdzie powyższa suma przebiega po wszystkich ciągach N liczb całkowitych nieujemnych $(m_1, ..., m_N)$ spełniających

$$m_1 + 2m_2 + ... + Nm_N = N.$$

Dowód powyższego wzoru oraz jego historia są przedstawione w [5]. Zastosujemy lematy 5.1 oraz 5.3 by otrzymać asymptotyczny wzór dla pewnej ważnej pomocnicznej sumy. Niech $X \geq 0$, $\theta \geq 0$, przy czym θ jest całkowitą wielokrotnoscią liczby $\frac{1}{2}$.

Definicja 5.4. Dla $q \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$ definiujemy

$$\Upsilon_{q,r}(X;\theta) = \sum_{-(X+r)/q \leq h \leq (X-r)/q} (X^2 - (qh+r)^2)^{\theta}.$$

Przypomnijmy, że funkcja Γ jest zdefiniowana dla liczb $x > 0$ w następujący sposób

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

Lemat 5.5. *Dla $N \in \mathbb{N}$, $1 \leq N \leq \lceil \theta \rceil$ zachodzi*

$$\Upsilon_{q,r}(X;\theta) = \frac{2X}{q} \cdot X^{2\theta} \frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/2+\theta)} + O(X^{2\theta}(q/X)^{N-1})$$

gdzie

$$|O(X^{2\theta}(q/X)^{N-1})| \leq 2^{4-N} \pi^{-N} C_{N,\theta} X^{2\theta}(q/X)^{N-1}$$

dla

$$C_{N,\theta} = \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!} \cdot \frac{\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(1+\theta-m_1-m_2)} 2^{m_1}.$$

Dowód. Niech

$$F(y) = y^{\theta} \quad \text{oraz} \quad G(x) = X^2 - (qx+r)^2. \tag{5.1}$$

Niech $a = -\frac{X+r}{q}$,$b = \frac{X-r}{q}$. Wówczas zachodzi

$$G(a) = X^2 - (-X)^2 = 0 \text{ oraz } G(b) = X^2 - X^2 = 0.$$

Ponadto $G(x) \neq 0$ dla $a < x < b$. Dla $0 \leq j \leq 2$ zachodzi

$$G^{(j)}(x) = -\frac{2!}{(2-j)!} q^j (qx+r)^{2-j},$$

podczas gdy $G^{(j)}(x) = 0$ dla $j > 2$. Dla $0 \leq m \leq \lceil \theta \rceil$ mamy

$$F^{(m)}(y) = \theta(\theta-1)...(\theta-m+1)y^{\theta-m} = \frac{\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(1+\theta-m)} y^{\theta-m}.$$

Wówczas ponieważ $N-1 \leq \lceil \theta \rceil - 1 < \theta$, to z lematu 5.3 funckja $F(G(x))$ ma ciągłe na przedziale $[a,b]$ pochodne rzędów aż do $N-1$. Natomiast dla N-tej pochodnej z lematu 5.3 mamy wzór

$$\frac{d^N}{dx^N} F(G(x)) = \sum_{m_1+2m_2+...+Nm_N=N} \frac{N!}{m_1!...m_N!} F^{(m_1+\cdots+m_N)}\big(G(x)\big) \prod_{j=1}^{N} \Big(\frac{G^{(j)}(x)}{j!}\Big)^{m_j}.$$

Łatwo można zauważyć powyższe składniki są ciągłe na (a,b) oraz wszystkie są całkowalne na $[a,b]$, być może poza sytuacją gdy $m_1+m_2+...+m_N = N$, czyli składnikiem dla $m_1 = N$, natomiast wtedy mamy

$$\int_a^b |\frac{N!}{N!} F^N(G(x)) \cdot G'(x)^N| \; dx =$$

$$\theta(\theta-1)...(\theta-N+1) \cdot (2q)^N \Big(\int_a^b (X^2 - (qx+r)^2)^{\theta-N} \cdot |qx+r|^N \; dx \Big),$$

przy czym

$$\int_a^b (X^2 - (qx+r)^2)^{\theta-N} |qx+r|^N \; dx =$$

$$\int_a^{-r/q} (X^2-(qx+r)^2)^{\theta-N} |qx+r|^N \; dx + \int_{-r/q}^b (X^2-(qx+r)^2)^{\theta-N} |qx+r|^N \; dx$$

$$= 2 \int_0^{X^2} (X^2-u)^{\theta-N} u^{N/2} \frac{1}{2q\sqrt{u}} \; du < \infty.$$

Ostatnia całka jest zbieżna, bo $\theta - N \geq \theta - \lceil \theta \rceil > -1$, w jednej z równości zastosowaliśmy w obydwu całkach podstawienie $u = (qx+r)^2$. Zatem funkcja $\frac{d^N}{dx^N} F(G(x))$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$, czyli założenia lematu 5.1

są spełnione. Dla $0 \leq m < \theta$ zachodzi $F^{(m)}(G(a)) = F^{(m)}(G(b)) = 0$, stąd z lematu 5.3 wynika, że dla wszystkich $0 \leq \kappa \leq N-1 < \theta$ mamy

$$\frac{d^\kappa}{dx^\kappa} F(G(x))\Big|_{x=a} = \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} F(G(x))\Big|_{x=b} = 0.$$

Ponieważ $F(G(a)) = 0$, to $\sum_{a \leq h \leq b} F(G(h)) = \sum_{a < h \leq b} F(G(h))$, wówczas korzystając z lematu 5.1 otrzymujemy

$$\sum_{a \leq h \leq b} F(G(h)) = \int_a^b F(G(x))\, dx - \frac{(-1)^N}{N!} \int_a^b \beta_N(x) \frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\, dx \quad (5.2)$$

Stosując zamianę zmiennych $y = (qx+r)/X$ w pierwszej całce otrzymujemy

$$\int_a^b F(G(x))\, dx = \int_a^b (X^2 - (qx+r)^2)^\theta\, dx = \frac{X}{q} \cdot X^{2\theta} \int_{-1}^1 (1-y^2)^\theta\, dy =$$

$$= 2\frac{X}{q} \cdot X^{2\theta} \int_0^1 (1-y^2)^\theta\, dy = \frac{X}{q} \cdot X^{2\theta} \int_0^1 u^{-1/2}(1-u)^\theta\, du$$
$$= \frac{X}{q} \cdot X^{2\theta} \cdot \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(3/2+\theta)} = 2\frac{X}{q} X^{2\theta} \cdot \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(3/2+\theta)}.$$

By wyliczyć ostatnią całkę skorzystaliśmy z reprezentacji funkcji B za pomocą funkcji Γ, dowód jest przestawiony w [7] (Theorem 8.20) .
Teraz zajmiemy się drugim wyrazem po prawej stronie równości (5.2). Ponieważ $G^{(j)}(x) = 0$ dla $j > 2$, to z lematu 5.3 zachodzi

$$\frac{d^N}{dx^N} F(G(x)) = \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1! m_2!} F^{(m_1+m_2)}(G(x)) \cdot G'(x)^{m_1} \cdot \Big(\frac{G''(x)}{2}\Big)^{m_2}$$

$$= \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1! m_2!} \cdot \frac{\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(1+\theta-m_1-m_2)} (X^2 - (qx+r)^2)^{\theta-m_1-m_2} \cdot (2q(qx+r))^{m_1} q^{2m_2} \cdot (-1)^{m_1+m_2}$$

$$= q^N \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1! m_2!} \cdot \frac{\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(1+\theta-m_1-m_2)} 2^{m_1} (X^2 - (qx+r)^2)^{\theta-m_1-m_2} (qx+r)^{m_1} \cdot (-1)^{m_1+m_2}.$$

Jeśli $\theta \in \mathbb{N}$, to wtedy $\theta \geq N$, stąd dla wszystkich $x \in [a,b]$ mamy

$$\Big|\frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\Big| \leq q^N \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1! m_2!} \cdot \frac{\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(1+\theta-m_1-m_2)} 2^{m_1} X^{2(\theta-m_1-m_2)+m_1}$$

$$= q^N X^{2\theta-N} C_{N,\theta}.$$

Natomiast gdy $\theta \notin \mathbb{N}$, niech $v = 1 - \{\theta\}$, wtedy $\theta + v = \lceil\theta\rceil$, stąd dla $(a+b)/2 \le x \le b$ zachodzi

$$\Big|(X - qx - r)^v \frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\Big|$$

$$\le q^N \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!} \cdot \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(1+\theta-m_1-m_2)} 2^{m_1} (X^2-(qx+r)^2)^{\lceil\theta\rceil-m_1-m_2} \cdot X^{m_1} \cdot$$

$$\cdot (X^2 - (qx+r)^2)^{-v} (X - (qx+r))^v.$$

Zauważmy, że dla $(a+b)/2 \le x \le b$

$$(X^2-(qx+r)^2)^{-v}(X-(qx+r))^v = (X+qx+r)^{-v}(X-(qx+r))^{-v}(X-(qx+r))^v$$

$$= (X + qx + r)^{-v} \le X^{-v}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\Big|(X-qx-r)^v \frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\Big| \le X^{-v} q^N \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!} \cdot \frac{\Gamma(\theta+1)}{\Gamma(1+\theta-m_1-m_2)} 2^{m_1} X^{2(\lceil\theta\rceil-m_1-m_2)+m_1}$$

$$= q^N X^{2\lceil\theta\rceil-N-v} C_{N,\theta} = q^N X^{2\theta-N+v} C_{N,\theta}.$$

Zupełnie analogicznie jak wyżej da się wykazać, że dla $a \le x \le (a+b)/2$ zachodzi

$$\Big|(X + qx + r)^v \frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\Big| \le q^N X^{2\theta-N+v} C_{N,\theta}.$$

Z powyższych obserwacji oraz uwagi 5.2 wynika że dla $\theta \notin \mathbb{N}$ zachodzi

$$\Big|\frac{(-1)^N}{N!} \int_a^b \beta_N(x) \frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\, dx\Big| \le$$

$$2^{2-N}\pi^{-N}\Big(\int_a^{(a+b)/2} \Big|\frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\Big|\, dx + \int_{(a+b)/2}^b \Big|\frac{d^N}{dx^N} F(G(x))\Big|\, dx\Big) \le$$

$$2^{2-N}\pi^{-N} q^N X^{2\theta-N+v} C_{N,\theta}\Big(\int_a^{(a+b)/2} (X+qx+r)^{-v}\, dx + \int_{(a+b)/2}^b (X-qx-r)^{-v}\, dx\Big)$$

$$= 2^{2-N}\pi^{-N} q^N X^{2\theta-N+v} C_{N,\theta} \cdot 2\frac{1}{q} \int_0^X u^{-v}\, du$$

$$= 2^{2-N}\pi^{-N} q^N X^{2\theta-N+v} C_{N,\theta} \cdot \frac{2}{q} \cdot \frac{1}{1-v} X^{1-v} C_{N,\theta}$$

$$= 2^{4-N}\pi^{-N}C_{N,\theta}X^{2\theta}(q/X)^{N-1}.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z faktu, że θ jest naturalną wielokrotnościa liczby $1/2$, zatem dla $\theta \notin \mathbb{N}$ mamy $v = 1/2$.
Natomiast dla $\theta \in \mathbb{N}$ zachodzi poniższe oszacowanie

$$\left|\frac{(-1)^N}{N!}\int_a^b \beta_N(x)\frac{d^N}{dx^N}F(G(x))\,dx\right| \leq 2^{2-N}\pi^{-N}\cdot(b-a)q^N X^{2\theta-N}C_{N,\theta}$$
$$= 2^{3-N}\pi^{-N}C_{N,\theta}\cdot X^{2\theta}(q/X)^{N-1}.$$

□

Naszym kolejnym celem będzie udowodnienie wielowymiarowego uogólnienia lematu 5.5.

Definicja 5.6. Dla $q \in \mathbb{Z}$, $r_1, ..., r_l \in \mathbb{Z}$ definiujemy

$$\Xi^{(l)}_{q,\mathbf{r}}(X;\theta) = \underset{x_1^2+...x_l^2\leq X^2}{\sum_{\substack{|x_1|\leq X \\ x_1\equiv r_1 \pmod q}} \cdots \sum_{\substack{|x_l|\leq X \\ x_l\equiv r_l \pmod q}}} (X^2 - x_1^2 - ... - x_l^2)^\theta.$$

Zauważmy, że $\Xi^{(1)}_{q,\mathbf{r}}(X;\theta) = \Upsilon_{q,r}(X;\theta)$.

Lemat 5.7. *Dla $l, N \in \mathbb{N}$, $1 \leq N \leq \lceil\theta\rceil$ zachodzi*

$$\Xi^{(l)}_{q,\boldsymbol{r}}(X;\theta) = (2X/q)^l X^{2\theta}\frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^l}{\Gamma(1+\theta+l/2)} + O_l(X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{l-1})$$

gdzie

$$|O_l(X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{l-1})| \leq A_l\cdot X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{l-1}$$

dla pewnej stałej A_l niezależnej od $X, \boldsymbol{r}, q$.

Dowód. Udowodnimy tezę indukcyjnie względem l. Dla $l = 1$ teza jest prawdziwa z lematu 5.5. Załóżmy, że $L \in \mathbb{N}$,$L > 1$ oraz teza indukcyjna została wykazana dla wszystkich $1 \leq l < L$, wówczas zachodzi

$$\Xi^{(L)}_{q,\mathbf{r}}(X;\theta) = \sum_{-(X+r_L)/q\leq h_L\leq(X-r_L)/q} \Xi^{(L-1)}_{q,\mathbf{r}'}(Y;\theta) \tag{5.3}$$

gdzie

$$\mathbf{r}' = (r_1, ..., r_{L-1}) \text{ oraz } Y = (X^2 - (qh_L + r_L)^2)^{1/2}.$$

Z założenia indkucyjnego zachodzi

$$\Xi_{q,\mathbf{r}}^{(L-1)}(Y;\theta) = (2Y/q)^{L-1}Y^{2\theta}\cdot\frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^{L-1}}{\Gamma(1+\theta+(L-1)/2)}+O_{L-1}(Y^{2\theta}(q/Y)^{N-1}(1+Y/q)^{L-2}).$$

Podstawiając powyższy wzór do równości (5.3) otrzymujemy

$$\Xi_{q,\mathbf{r}}^{(L)}(X;\theta) = \frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^{L-1}}{\Gamma(1+\theta+(L-1)/2)}T_0 + O(X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1}) \tag{5.4}$$

gdzie

$$T_0 = (2/q)^{L-1}\sum_{(-X+r_L)/q\le h_L\le (X-r_L)/q}(X^2-(qh_L+r_L)^2)^{\theta+\frac{L-1}{2}} \tag{5.5}$$

oraz

$$|O(X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1})| \le A_{L-1}\sum_{-(X+r_L)/q\le h_L\le (X-r_L)/q} Y^{2\theta+1-N}q^{N-1}(1+Y/q)^{L-2}$$

$$\le A_{L-1}2(1+X/q)q^{N-1}X^{2\theta+1-N}(1+X/q)^{L-2} = 2A_{L-1}X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1}.$$

Korzystając z lematu 5.5 w równości (5.5) otrzymujemy

$$T_0 = (2/q)^{L-1}(2X/q)X^{2\theta+(L-1)}\frac{\Gamma(1+\theta+(L-1)/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(\theta+(L-1)/2+3/2)}+O_1(X^{2\theta+L-1}(q/X)^{N-1}q^{-L+1})$$

przy czym

$$|O_1(X^{2\theta+L-1}(q/X)^{N-1})| \le (2/q)^{L-1}\cdot 2^{4-N}\pi^{-N}C_{N,\theta+(L-1)/2}X^{2\theta+L-1}(q/X)^{N-1}$$

$$= 2^L\cdot 2^{3-N}\pi^{-N}C_{N,\theta+(L-1)/2}X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(X/q)^{L-1} \le$$

$$2^L\cdot 2^{3-N}\pi^{-N}C_{N,\theta+(L-1)/2}X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1}.$$

Podstawiając asympototyczny wzór na T_0 do równości (5.4) otrzymujemy

$$\Xi_{q,\mathbf{r}}^{(L)}(X;\theta) = (2X/q)^L X^{2\theta}\frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^L}{\Gamma(1+\theta+L/2)}+O_L(X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1})$$

gdzie

$$|O_L(X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1})| \le A_L X^{2\theta}(q/X)^{N-1}(1+X/q)^{L-1}$$

dla

$$A_L = 2A_{L-1} + 2^L\cdot 2^{3-N}\pi^{-N}C_{N,\theta+(L-1)/2}\cdot\frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^{L-1}}{\Gamma(1+\theta+(L-1)/2)},$$

przy czym
$$A_1 = 2^{4-N}\pi^{-N}C_{N,\theta}.$$
Zatem teza indukcyjna jest również prawdziwa dla L. Na mocy zasady indukcji matematycznej lemat jest prawdziwy dla wszystkich $L \in \mathbb{N}$. $\square$

Naszym kolejnem celem będzie oszacowanie od góry stałej A_L w zależności od θ oraz N, zakładamy teraz że $N \leq \lceil \theta \rceil$ jest ustalone.

Lemat 5.8. *Dla dowolnego $L \in \mathbb{N}$ zachodzi*
$$A_L \leq \cdot 2^L \cdot 2^{3-N}\pi^{-N} \cdot 3^3\Gamma(1+\theta) \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!}2^{m_1}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że dla $x \geq 1$ mamy
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \geq \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \geq \int_1^\infty e^{-t}\,dt = \frac{1}{e} > \frac{1}{3},$$
natomiast dla $x \in (0,1)$ prawdziwe są poniższe nierówności
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \geq \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt \geq e^{-1}\int_0^1 t^{x-1}\,dt = \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{x} \geq \frac{1}{e} > \frac{1}{3}.$$
Stąd wynika, że dla wszystkich $l \in \mathbb{N}$ zachodzi
$$\frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^{l-1}}{\Gamma(1+\theta+(l-1)/2)} \cdot C_{N,\theta+(l-1)/2} =$$
$$\frac{\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^{l-1}}{\Gamma(1+\theta+(l-1)/2)} \cdot \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!} \cdot \frac{\Gamma(1+\theta+(l-1)/2)}{\Gamma(1+\theta+(l-1)/2-m_1-m_2)}2^{m_1}$$
$$\leq 3\Gamma(1+\theta)\Gamma(3/2)^{l-1} \cdot \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!}2^{m_1}.$$
Wtedy z dowodu lematu 5.7 oraz powyższej nierówności otrzymujemy
$$A_L \leq 2A_{L-1} + (2\cdot\Gamma(3/2))^{L-1}3\cdot 2^{4-N}\pi^{-N} \cdot \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\Gamma(1+\theta)$$
oraz
$$A_1 \leq 3\cdot 2^{4-N}\pi^{-N} \cdot \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\Gamma(1+\theta).$$

Niech $c = 3 \cdot 2^{4-N}\pi^{-N} \cdot \sum_{m_1+2m_2=N} \frac{N!}{m_1!m_2!} 2^{m_1}\Gamma(1+\theta)$, wówczas

$$A_L \leq 2A_{L-1} + (2 \cdot \Gamma(3/2))^{L-1}c = 2A_{L-1} + \sqrt{\pi}^{L-1}c \leq$$

$$2^2 A_{L-2} + c(2\sqrt{\pi}^{L-2} + \sqrt{\pi}^{L-1}) \leq ...$$

$$\leq 2^{L-1}A_1 + c(2^{L-2}\sqrt{\pi} + 2^{L-3}\sqrt{\pi}^2 + ... + \sqrt{\pi}^{L-1})$$

$$\leq 2^{L-1}c + c\sqrt{\pi}\frac{2^{L-1} - \sqrt{\pi}^{L-1}}{2 - \sqrt{\pi}} \leq 2^{L-1}c + 8c(2^{L-1} - \sqrt{\pi}^{L-1}) \leq 9c \cdot 2^{L-1}.$$

□

6 Wyliczony wkład dużych łuków

6.1 Całka singularna

Definicja 6.1. Dla $u, m, q \in \mathbb{N}$, $u \geq 3$, definiujemy całkę singularną poniższym wzorem

$$I_u(m) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\beta)^u e(-\beta m)\ d\beta \tag{6.1}$$

określamy również przyciętą całkę singularną w następujący sposób

$$I_u(m;q) = \int_{-\frac{1}{4Pq}}^{-\frac{1}{4Pq}} v(\beta)^u e(-\beta m)\ d\beta \tag{6.2}$$

Z lematu 4.6 wynika, że dla $u \geq 3$ całka w równości (6.1) jest bezwzględnie zbieżna.
Naszym kolejnym celem będzie wyliczenie wartości całki $I_u(m)$, która okaże się przydatne w dalszej części tej pracy.

Lemat 6.2. *Niech $A < C < B$ oraz niech f będzie funkcją o ograniczonym wahaniu na przedziale $[A, B]$, która jest ciągła w punkcie C, wówczas zachodzi*

$$\lim_{N\to\infty} \int_A^B f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\ du = f(C).$$

Dowód. Niech $\delta > 0$ będzie dowolną liczbą, taką że $(C-\delta, C+\delta) \subseteq (A, B)$. Rozważmy funkcję

$$g(x) = \chi_{(-\delta,\delta)}(x)f(x+C).$$

Wedy g jest funkcją ciągłą w 0 o ograniczonym wahaniu na przedziale $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, więc z [6] (Theorem D.2) zachodzi

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\frac{\sin((2N+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\,du = g(0) = f(C).$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{N\to\infty}\int_{A}^{B} f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\,du = \lim_{N\to\infty}\int_{A}^{C-\delta} f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\,du$$

$$+\lim_{N\to\infty}\int_{C+\delta}^{B} f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\,du + \lim_{N\to\infty}\int_{C-\delta}^{C+\delta} f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\,du.$$

Z lematu Riemanna-Lebesgue'a dwie pierwsze granice są równe 0, natomiast trzecia granica wynosi

$$\lim_{N\to\infty}\int_{C-\delta}^{C+\delta} f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\,du = \lim_{N\to\infty}\int_{-\delta}^{\delta} f(x+C)\frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\pi x}\,dx =$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\frac{\sin((2N+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\,du + \lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\Big(\frac{1}{\pi u}-\frac{1}{\sin(\pi u)}\Big)\sin((2N+1)\pi u)\,du.$$

Funkcja $\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\sin(\pi x)}$ może być przedłużona do funkcji ciągłej na $[-1/2,1/2]$, wówczas korzystając z lematu Riemanna-Lebesgue'a mamy

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\Big(\frac{1}{\pi u}-\frac{1}{\sin(\pi u)}\Big)\sin((2N+1)\pi u)\,du = 0.$$

Stąd otrzymujemy

$$\lim_{N\to\infty}\int_{A}^{B} f(u)\frac{\sin((2N+1)\pi(u-C))}{\pi(u-C)}\,du = \lim_{N\to\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(u)\frac{\sin((2N+1)\pi u)}{\sin(\pi u)}\,du = f(C).$$

$\square$

Lemat 6.3. *Niech $u\in\mathbb{N}$, $u\geq 4$ oraz $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ będzie liczbą taką,że $m\leq n$. Wtedy mamy*

$$I_u(m) = \frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}m^{u/2-1}.$$

Dowód. Dla $u \geq 4 > 3$ uzasadniliśmy że całka $I_u(m)$ jest bezwzględnie zbieżna, wówczas otrzymujemy

$$I_u(m) = \lim_{N\to\infty} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} v(\beta)^u e(-\beta m)\ d\beta$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \int_{[0,P]^u} e(\beta(\gamma_1^2 + ... + \gamma_u^2 - m))\ d\boldsymbol{\gamma}\ d\beta$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_{[0,P]^u} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e(\beta(\gamma_1^2 + ... + \gamma_u^2 - m)) d\beta\ d\boldsymbol{\gamma}.$$

Zauważmy, że dla $\psi \neq 0$ zachodzi

$$\int_{-N-1/2}^{N+1/2} e(\beta\psi)\ d\beta = \frac{\sin((2N+1)\pi\psi)}{\pi\psi}.$$

Przyjmując konwencję że dla $\psi = 0$ prawa strona powyższej równości wynosi $2N+1$ otrzymujemy

$$I_u(m) = \lim_{N\to\infty} \int_{[0,P]^u} \frac{\sin((2N+1)\pi(\gamma_1^2 + ... + \gamma_u^2 - m))}{\pi(\gamma_1^2 + ... + \gamma_u^2 - m)} d\boldsymbol{\gamma}.$$

Stosując podstawienie $x_j = \gamma_j^2$ dla $1 \leq j \leq u$ oraz przypominając sobie, że $P^2 = n$ otrzymujemy

$$I_u(m) = \lim_{N\to\infty} 2^{-u} J(N)$$

gdzie

$$J(N) = \int_{[0,n]^u} \frac{\sin((2N+1)\pi(x_1 + ... + x_u - m))}{\pi(x_1 + ... + x_u - m)} (x_1 ... x_u)^{-1/2}\ d\boldsymbol{x}.$$

Stosując zamianę zmiennych $(x_1, ..., x_{u-1}, x_u) \mapsto (x_1, ..., x_{u-1}, v)$, gdzie $v = x_1 + x_2 + ... + x_u$ dostajemy wzór

$$J(N) = \int_0^{un} \Psi(v) \frac{\sin((2N+1)\pi(v-m))}{\pi(v-m)}\ dv$$

w którym

$$\Psi_u(v) = \int_{\mathfrak{B}(v)} (x_1 ... x_{u-1})^{-1/2} (v - x_1 - ... - x_{u-1})^{-1/2}\ dx_1 ... dx_{u-1}$$

oraz

$$\mathfrak{B}(v) = \{(x_1, ..., x_{u-1}) \in [0, n]^{u-1} : 0 \leq v - x_1 - ... - x_{u-1} \leq n\}.$$

Naszym celem będzie pokazanie, że Ψ_u jest funkcją o ograniczonym wahaniu na przedziale [0,un]. Stosując zamianę zmiennych $x_j = vt_j$ otrzymujemy

$$\Psi_u(v) = v^{u/2-1} \int_0^{n/v} \cdots \int_0^{n/v} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1-t_1-...-t_{u-1})^{-1/2}\, dt_1...dt_{u-1}. \tag{6.3}$$

Gdzie zbiór po którym całkujemy jest ograniczony przez warunek $1 - \frac{n}{v} \leq t_1 + ... + t_{u-1} \leq 1$, funkcja $v \mapsto v^{u/2-1}$ jest rosnąca, zatem jest o ograniczonym wahaniu na przedziale $[0, un]$, ponadto funkcja

$$v \mapsto \underset{1-\frac{n}{v} \leq t_1+...+t_{u-1} \leq 1}{\int_0^{n/v} \cdots \int_0^{n/v}} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1 - t_1 - ... - t_{u-1})^{-1/2}\, dt_1...dt_{u-1}$$

jest malejąca zatem również jest o ograniczonym wahaniu na przedziale $[0, un]$, stąd $\Psi_u(v)$ jest funkcją o ograniczonym wahaniu na przedziale $[0, un]$. Łatwo można zauważyć, że warunki $t_j \geq 0$ oraz $t_1 + ... + t_{u-1} \leq 1$ implikują $t_j \in [0, 1]$ dla wszystkich j, stąd z równości (6.3) mamy

$$0 \leq \Psi_u(v) \leq v^{u/2-1} \underset{0 \leq t_1+...+t_{u-1} \leq 1}{\int_0^1 \cdots \int_0^1} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1-t_1-...-t_{u-1})^{-1/2}\, dt_1...dt_{u-1}.$$

Z powyższej równości wynika, że jeśli $m = 0$, to wtedy

$$0 \leq \int_0^{un} \Psi_u(v) \frac{1}{\pi(v-m)}\, dv$$

$$\leq \underset{0 \leq t_1+...+t_{u-1} \leq 1}{\int_0^1 \cdots \int_0^1} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1-t_1-...-t_{u-1})^{-1/2}\, dt_1...dt_{u-1} \cdot \int_0^{un} v^{u/2-2}\, dv < \infty.$$

Wtedy z lematu Riemanna Lebesgue'a mamy

$$I_u(m) = \lim_{N \to \infty} 2^{-u} J(N) = 0$$

Zatem dla $m = 0$ teza lematu jest prawdziwa. Teraz rozważmy $0 < m \leq n$. Ponieważ zachodzi

$$\underset{1-\frac{n}{v} \leq t_1+...+t_{u-1} \leq 1}{\int_0^{n/v} \cdots \int_0^{n/v}} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1 - t_1 - ... - t_{u-1})^{-1/2}\, dt_1...dt_{u-1}$$

$$\leq \underset{0\leq t_1+...+t_{u-1}\leq 1}{\int_0^1 \cdots \int_0^1} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1-t_1-...-t_{u-1})^{-1/2}\ dt_1...dt_{u-1},$$

to z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej wynika, że funkcja

$$v \mapsto \underset{1-\frac{n}{v}\leq t_1+...+t_{u-1}\leq 1}{\int_0^{n/v} \cdots \int_0^{n/v}} (t_1...t_{u-1})^{-1/2}(1-t_1-...-t_{u-1})^{-1/2}\ dt_1...dt_{u-1}$$

jest ciągła w każdym punkcie $v > 0$,czyli funkcja Ψ_u jest również ciągła w każdym punkcie $v > 0$, wówczas z lematu 6.2 otrzymujemy

$$I_u(m) = \lim_{N\to\infty} 2^{-u}J(N) = 2^{-u}\Psi_u(m).$$

Teraz wykażemy indukcyjnie względem $t \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$, $y \in \mathbb{R}$, $0 \leq y \leq n$ zachodzi

$$\Psi_t(y) = \frac{\Gamma(1/2)^t}{\Gamma(t/2)} y^{t/2-1}.$$

Najpierw dla $t = 2$ mamy

$$\Psi_t(y) = \underset{0\leq y-x\leq n}{\int_0^n} x^{-1/2}(y-x)^{-1/2}\ dx = \int_0^y x^{-1/2}(y-x)^{-1/2}\ dx,$$

w drugiej równości skorzystaliśmy z faktu, że $y < n$, stosując zamianę zmiennych $x = yz$ otrzymujemy

$$\Psi_t(y) = \int_0^1 z^{-1/2}(1-z)^{-1/2}\ dz = \frac{\Gamma(1/2)^2}{\Gamma(1)}.$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy ze znanej tożsamości dla funkcji Gamma, dowód jest przestawiony w [7] (Theorem 8.20), zatem teza indukcyjna zachodzi dla $t = 2$. Załóżmy, że teza indukcyjna zachodzi dla $t = l \geq 2$, rozważmy $l + 1$. Zauważmy, że korzystając z założenia indukcyjnego zachodzi

$$\Psi_{l+1}(y) = \underset{0\leq y-x_1-...-x_l\leq n}{\int_0^n \cdots \int_0^n} (x_1...x_l)^{-1/2}(y-x_1-...-x_l)^{-1/2}\ dx_1...dx_l$$

$$= \int_0^y \underset{0\leq y-x_1-...-x_l\leq n}{\int_0^n \cdots \int_0^n} (x_1...x_l)^{-1/2}(y-x_1-...-x_l)^{-1/2}\ dx_1...dx_l$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^y x_l^{-1/2}\Psi_l(y-x_l)\ dx_l = \frac{\Gamma(1/2)^l}{\Gamma(l/2)}\int_0^y x_l^{-1/2}(y-x_l)^{l/2-1}\ dx_l \\
&= \frac{\Gamma(1/2)^l}{\Gamma(l/2)} y^{l/2-1/2}\int_0^1 x_l^{-1/2}(1-x_l)^{l/2-1}\ dx_l \\
&= \frac{\Gamma(1/2)^l}{\Gamma(l/2)} y^{l/2-1/2}\cdot\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(l/2)}{\Gamma((l+1)/2)}.
\end{aligned}
$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z faktu, że warunek $0 \leq y - x_1 - ... - x_l$ implikuje $x_l \leq y$ (ponieważ wszystkie x_j są dodatnie). W ostatniej równości skorzystaliśmy z [7] (Theorem 8.20). Zatem teza indukcyjna zachodzi dla $l+1$. Na mocy indukcji matematycznej teza zachodzi dla wszystkich $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 2$. Wracając do dowodu lematu mamy

$$
I_u(m) = 2^{-u}\Psi_u(m) = 2^{-u}\frac{\Gamma(1/2)^u}{\Gamma(u/2)}m^{u/2-1} = \frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}m^{u/2-1}.
$$

□

6.2 Dokładniejsza analiza dużych łuków

Celem tej części pracy licencjackiej jest oszacowanie wyrazów $\mathfrak{F}_{t,l}(n)$ zdefiniowanych równaniem (4.5). Z twierdzenia dwumianowego Newtona zastosowanego dla $(h(\alpha) - 2f^*(\alpha))^l$ zachodzi

$$
\mathfrak{F}_{t,l}(n) = \sum_{v=0}^{l}(-1)^v\binom{l}{v}\mathfrak{K}_{t-l+v,l-v}(n) \tag{6.4}
$$

gdzie

$$
\mathfrak{K}_{u,v}(n) = \int_{\mathfrak{M}}(2f^*(\alpha))^u h(\alpha)^v e(-n\alpha)\ d\alpha. \tag{6.5}
$$

Korzystając z defnicji 3.2 funkcji $h(\alpha)$ otrzymujemy

$$
\mathfrak{K}_{u,v}(n) = 2^u\sum_{|m_1|\leq P}\cdots\sum_{|m_v|\leq P}\mathfrak{R}_u(n-m_1^2-...-m_v^2) \tag{6.6}
$$

gdzie

$$
\mathfrak{R}_u(m) = \int_{\mathfrak{M}} f^*(\alpha)^u e(-m\alpha)\ d\alpha, \tag{6.7}
$$

przy czym dla $v=0$ mamy

$$
\mathfrak{K}_{u,0}(n) = 2^u\mathfrak{R}_u(n).
$$

Definicja 6.4. Dla $u, \theta, A, B \geq 0$, gdzie $A < B$ definiujemy

$$V_A^B(u;\theta) = \sum_{A \leq q < B} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} q^{\theta} |q^{-1} S(q,a)|^u.$$

Lemat 6.5. *Dla $u \geq 2\theta + 5$, $Q \geq 1$ zachodzi*

$$V_Q^{\infty}(u;\theta) \leq 2^{5+\theta-u/2} Q^{2+\theta-u/2}.$$

Dowód. Z lematu 4.2 wynika, że dla $X \geq 1$ zachodzi

$$V_X^{2X}(u;\theta) = \sum_{X \leq q < 2X} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} q^{\theta} |q^{-1} S(q,a)|^u \leq \sum_{X \leq q < 2X} 2^{u/2} q^{1+\theta-u/2}$$

$$\leq \sum_{X \leq q < 2X} 2^{u/2} X^{1+\theta-u/2} \leq 2^{u/2} X^{2+\theta-u/2}.$$

Stąd mamy

$$V_Q^{\infty}(u;\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} V_{2^j Q}^{2^{j+1}Q}(u;\theta) \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{u/2} (2^j Q)^{2+\theta-u/2}$$

$$= 2^{u/2} Q^{2+\theta-u/2} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{2+\theta-u/2})^j = 2^{u/2} Q^{2+\theta-u/2} \frac{1}{1 - 2^{2+\theta-u/2}} \leq 2^{2+u/2} Q^{2+\theta-u/2}.$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z faktu, że $u/2 - 2 - \theta \geq 1/2$, co implikuje

$$1 - 2^{2+\theta-u/2} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{4}.$$

$\square$

Definicja 6.6. Dla $u, m \in \mathbb{Z}$, $u \geq 5$, $m \geq 0$ definiujemy szereg singularny poniższym wzorem

$$\mathfrak{S}_u(m) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} (q^{-1} S(q,a))^u e(-ma/q). \tag{6.8}$$

określamy również przycięty szereg singularny w następujący sposób

$$\mathfrak{S}_u(m;P) = \sum_{1 \leq q \leq P} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} (q^{-1} S(q,a))^u e(-ma/q). \tag{6.9}$$

Z lematu 4.2 wynika, że szereg w równości (6.8) jest bezwzględnie zbieżny dla $u \geq 5$.

Lemat 6.7. *Załóżmy, że u jest liczbą całkowitą, taką że $u \geq 2J+5$, wówczas dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej m mamy*

$$|\mathfrak{S}_u(m) - \mathfrak{S}_u(m;P)| \leq 2^{5-u/2}P^{-J-1/2} \leq 2^{5/2-J}P^{-J-1/2}.$$

Ponadto jeśli zachodzi $m \leq n$, to wtedy

$$\mathfrak{R}_u(m) = \frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\mathfrak{S}_u(m)m^{u/2-1} + O(P^{u-2-J-1/2})$$

gdzie

$$|O(P^{u-2-J-1/2})| \leq \big(4^u + 2^{5/2-J}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\big)P^{u-2-J-1/2}.$$

Dowód. Korzystając z lematu 1.9 otrzymujemy

$$\int_{\mathfrak{M}} f^*(\alpha)^u e(-m\alpha)\,d\alpha = \sum_{1\leq q\leq P}\sum_{\substack{0\leq a\leq q\\(a,q)=1}}\int_{\mathfrak{M}(q,a)}\big(q^{-1}S(q,a)v(\alpha-a/q)\big)^u e(-m\alpha)\,d\alpha$$

$$= \sum_{1<q\leq P}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\big(q^{-1}S(q,a)\big)^u e(-ma/q)\int_{\mathfrak{M}(q,a)} v(\alpha-a/q)^u e(-m(\alpha-a/q))\,d\alpha$$

$$+\int_{\mathfrak{M}(1,0)} v(\alpha)^u e(-m\alpha)\,d\alpha + \int_{\mathfrak{M}(1,1)} v(\alpha-1)^u e(-m(\alpha-1))\,d\alpha$$

$$= \sum_{1<q\leq P}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\big(q^{-1}S(q,a)\big)^u e(-ma/q)\int_{-\frac{1}{4Pq}}^{\frac{1}{4Pq}} v(\beta)^u e(-m\beta)\,d\beta$$

$$+\int_0^{\frac{1}{4P}} v(\beta)^u e(-m\beta)\,d\beta + \int_{-\frac{1}{4P}}^{0} v(\beta)^u e(-m\beta)\,d\beta$$

$$= \sum_{1\leq q\leq P}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\big(q^{-1}S(q,a)\big)^u e(-ma/q)\int_{-\frac{1}{4Pq}}^{\frac{1}{4Pq}} v(\beta)^u e(-m\beta)\,d\beta.$$

W powyższych równosciach skorzystaliśmy z lematu 1.10 oraz faktu, że $S(1,0) = S(1,1) = 1$. Stąd z równości (6.7) otrzymujemy

$$\mathfrak{R}_u(m) = \sum_{1\leq q\leq P}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\big(q^{-1}S(q,a)\big)^u e(-ma/q)I_u(m;q). \tag{6.10}$$

Korzystając z wniosku 4.7 otrzymujemy

$$|I_u(m) - I_u(m;q)| \leq \int_{-\infty}^{-\frac{1}{4Pq}} |v(\beta)|^u \, d\beta + \int_{\frac{1}{4Pq}}^{\infty} |v(\beta)|^u \, d\beta = 2\int_{\frac{1}{4Pq}}^{\infty} |v(\beta)|^u \, d\beta$$

$$\leq 2^{u/2+1}P^u \int_{\frac{1}{4Pq}}^{\infty} (1+P^2\beta)^{-u/2} \, d\beta = 2^{u/2+1}P^{u-2}\int_{\frac{P}{4q}}^{\infty} (1+\gamma)^{-u/2}$$

$$= 2^{u/2+1}P^{u-2} \cdot \frac{1}{u/2-1}(1+\frac{P}{4q})^{1-u/2} \leq 2^{u/2+1}P^{u-2} \cdot (\frac{P}{4q})^{1-u/2} = 2^u \cdot 2^{u/2-1}(qP)^{u/2-1}.$$

Ponadto z powyższej nierówności, równości (6.10) oraz lematu 4.2 dostajemy

$$|\mathfrak{R}_u(m) - \mathfrak{S}_u(m;P)I_u(m)| \leq \sum_{1\leq q\leq P} |I_u(m;q) - I(m)| \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} |q^{-1}S(q,a)|^u$$

$$\leq 2^u \cdot 2^{u/2-1}P^{u/2-1}\sum_{1\leq q\leq P} q^{u/2-1-u}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} |S(q,a)|^u$$

$$\leq 2^u \cdot 2^{u/2-1}P^{u/2-1}\sum_{1\leq q\leq P} q^{-u/2} \cdot 2^{u/2} \cdot q^{u/2} \leq 4^u P^{u/2} \leq 4^u P^{u-2-J-1/2}.$$

Z lematu 6.5 wynika,że

$$|\mathfrak{S}_u(m) - \mathfrak{S}_u(m;P)| \leq V_P^{\infty}(u;0) \leq 2^{5-u/2} \cdot P^{2-u/2} \leq 2^{5/2-J}P^{-J-1/2}$$

Łącząc wszystkie zależności oraz korzystając z lematu 6.3 otrzymujemy

$$\mathfrak{R}_u(m) = \frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\mathfrak{S}_u(m)m^{u/2-1} + O(P^{u-2-J-1/2})$$

gdzie

$$|O(P^{u-2-J-1/2})| \leq 4^u P^{u-2-J-1/2} + 2^{5/2-J}P^{-J-1/2} \cdot \frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)} m^{u/2-1} \leq$$

$$4^u P^{u-2-J-1/2} + 2^{5/2-J}P^{-J-1/2} \cdot \frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)} n^{u/2-1}$$

$$= \big(4^u + 2^{5/2-J}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\big)P^{u-2-J-1/2}.$$

$\square$

Z lematów 6.7 oraz 5.7 można uzyskać wzór asymptotyczny dla $\mathfrak{K}_{u,l}(n)$.

Lemat 6.8. *Załóżmy, że u, l są liczbami całkowitymi, takimi że $u \geq 2J+5$, $l \geq 0$, wówczas zachodzi*

$$\mathfrak{K}_{u,l}(n) = 2^{u+l}\frac{\Gamma(3/2)^{u+l}}{\Gamma((u+l)/2)}\mathfrak{S}_{u+l}(n)n^{(u+l)/2-1} + O(P^{u+l-2-J-1/2})$$

gdzie

$$|O(P^{u+l-2-J-1/2})| \leq 2^u\big(4^u + 2^{5/2-J}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\big)(2+1/P)^l P^{u+l-2-J-1/2}$$

$$+2^{u/2+5}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}(2+1/P)^l P^{u+l-2-J-1/2}$$

$$+2^{2(u+l)-J+2}\Gamma(3/2)^u\pi^{-1-J}\cdot 3^3 \sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot P^{u+l-2-J-1/2}$$

$$+2^{u+l+5}\frac{\Gamma(3/2)^{u+l}}{\Gamma((u+l)/2)}P^{u+l-2-J-1/2}.$$

Dowód. Rozważmy najpierw $l > 0$ .Z równości (6.6) oraz z lematu 6.7 otrzymujemy

$$\mathfrak{K}_{u,l}(n) = 2^u\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}T_1 + O_1(P^{u+l-2-J-1/2}) \tag{6.11}$$

gdzie

$$T_1 = \sum_{\substack{|m_1|\leq P \\ m_1^2+...+m_l^2\leq n}}\cdots\sum_{|m_l|\leq P}\mathfrak{S}_u(n-m_1^2-...-m_l^2)(n-m_1^2-...-m_l^2)^{u/2-1}$$

oraz

$$|O_1(P^{u+l-2-J-1/2})| \leq 2^u\big(4^u + 2^{5/2-J}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\big)P^{u-2-J-1/2}\cdot(2P+1)^l.$$

Stosując definicję szeregu singularnego (6.8) otrzymujemy

$$T_1 = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}(q^{-1}S(q,a))^u\Omega(n;q,a) \tag{6.12}$$

przy czym

$$\Omega(n;q,a)=\sum_{\substack{|m_1|\le P\\ m_1^2+\ldots+m_l^2\le n}}\cdots\sum_{|m_l|\le P}(n-m_1^2-\ldots-m_l^2)^{u/2-1}e(-(n-m_1^2-\ldots-m_l^2)a/q).$$

Porządkując liczby m_j w zależności od ich reszt modulo q oraz korzystając z definicji 5.6 dostajemy

$$\Omega(n;q,a)=\sum_{r_1=1}^{q}\cdots\sum_{r_l=1}^{q}\Xi_{q,\mathbf{r}}^{(l)}(P;u/2-1)e(-(n-r_1^2-\ldots-r_l^2)a/q).$$

Dla $1\le q\le P$ z lematu 5.7 zastosowanego dla $N=J+1$ mamy

$$\Omega(n;q,a)=2^l\frac{\Gamma(u/2)\Gamma(3/2)^l}{\Gamma((u+l)/2)}P^{u+l-2}T_2+O_2(P^{u+l-3-J}q^{J+1}) \tag{6.13}$$

gdzie

$$T_2=q^{-l}\sum_{r_1=1}^{q}\cdots\sum_{r_l=1}^{q}e(-(n-r_1^2-\ldots-r_l^2)a/q)=(q^{-1}S(q,a))^le(-na/q)$$

przy czym z lematów 5.7 oraz 5.8 otrzymujemy

$$|O_2(P^{u+l-3-J}q^{J+1})|\le$$

$$q^l\cdot2^l\cdot2^{2-J}\pi^{-1-J}\cdot3^3\Gamma(u/2)\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot P^{u-2}(q/P)^J(1+P/q)^{l-1}$$

$$=2^l\cdot2^{2-J}\pi^{-1-J}\cdot3^3\Gamma(u/2)\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot P^{u-2-J}q^{J+1}(q+P)^{l-1}$$

$$\le2^{2l-1}\cdot2^{2-J}\pi^{-1-J}\cdot3^3\Gamma(u/2)\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot P^{u+l-3-J}q^{J+1}.$$

Natomiast dla $q>P$ mamy trywialne oszacowanie
$|\Omega(n;q,a)|\le(2P+1)^lP^{u-2}$. Podstawiając równość (6.13) do równości (6.12) otrzymujemy

$$T_1=2^l\frac{\Gamma(u/2)\Gamma(3/2)^l}{\Gamma((u+l)/2)}\mathfrak{S}_{u+l}(n;P)n^{(u+l)/2-1}+O_3$$

gdzie

$$|O_3|\le(2P+1)^lP^{u-2}V_P^\infty(u;0)$$

$$+P^{u+l-3-J}\cdot V_1^P(u;J+1)\cdot 2^{2l-1}\cdot 2^{2-J}\pi^{-1-J}\cdot 3^3\Gamma(u/2)\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}.$$

Z lematu 6.5 zachodzi

$$V_P^{\infty}(u;0)\leq 2^{5-u/2}P^{2-u/2}\leq 2^{5-u/2}P^{-J-1/2}.$$

Ponadto z lematu 4.2 mamy

$$V_1^P(u;J+1)\leq \sum_{1\leq q\leq P}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} q^{J+1}|q^{-1}S(q,a)|^u\leq 2^{u/2}\sum_{1\leq q\leq P}q^{J+2-u/2}$$

$$\leq 2^{u/2}\sum_{1\leq q\leq P}q^{-1/2}\leq 2^{u/2}\int_0^P x^{-1/2}\,dx=2^{u/2+1}P^{1/2}.$$

Podstawiając wszystkie powyższe zależności do równości (6.11) ostatecznie otrzymujemy

$$\mathfrak{K}_{u,l}(n)=2^{u+l}\frac{\Gamma(3/2)^{u+l}}{\Gamma((u+l)/2)}\mathfrak{S}_{u+l}(n)n^{(u+l)/2-1}+O(P^{u+l-2-J-1/4})$$

gdzie

$$|O(P^{u+l-2-J-1/4})|\leq |O_1(P^{u+l-2-J-1/2})|$$

$$+2^u\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\Big(|O_3|+2^l\frac{\Gamma(u/2)\Gamma(3/2)^l}{\Gamma((u+l)/2)}\cdot|\mathfrak{S}_{u+l}(n)-\mathfrak{S}_{u+l}(n;P)|\cdot n^{(u+l)/2-1}\Big)$$

$$\leq 2^u\big(4^u+2^{5/2-J}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\big)(2+1/P)^lP^{u+l-2-J-1/2}$$

$$+2^{u/2+5}\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}(2+1/P)^lP^{u+l-2-J-1/2}$$

$$+2^u\frac{\Gamma(3/2)^u}{\Gamma(u/2)}\cdot P^{u+l-2-J-1/2}\cdot 2^{2l+u/2-J+2}\pi^{-1-J}\cdot 3^3\Gamma(u/2)\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}$$

$$+2^{u/2+l+5}\frac{\Gamma(3/2)^{u+l}}{\Gamma((u+l)/2)}P^{u+l-2-J-1/2}.$$

By oszacować ostatni składnik skorzystaliśmy z lematu 6.7 To udowadnia tezę dla $l>0$. Natomiast dla $l=0$ teza wynika wprost z lematu 6.7. □

7 Połączenie wszystkich udziałów dużych łuków

W poprzedniej części wyliczyliśmy asymptotycznie wyrażenie $\mathfrak{K}_{u,l}(n)$ dla odpowienich u. Naszym kolejnym celem jest wykorzystanie lematu 6.8, by wyliczyć $\mathfrak{F}_{t,l}(n)$, a co za tym idzie oszacować liczbę $R_s(n)$.

Lemat 7.1. *Niech t, w będą liczba naturalnymi, takimi że $t-w \geq 2J+5$, wówczas zachodzi*

$$|\mathfrak{F}_{t,w}(n)| = o(P^{t-2-J}) \leq 2^{t+w}\big(4^t + 2^{9/2-J}\Gamma(3/2)^t\big)(1+\frac{1}{2P})^t P^{t-2-J-1/2}$$

$$+2^{t+w+7}\Gamma(3/2)^t P^{t-2-J-1/2}\big((1+\frac{1}{2P})^t+1\big)$$

$$+2^{2t+w-J+2}\Gamma(3/2)^t\pi^{-1-J}\cdot 3^3 \sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot P^{t-2-J-1/2}.$$

Ponadto mamy

$$\mathfrak{F}_{t,0}(n) = 2^t\frac{\Gamma(3/2)^t}{\Gamma(t/2)}\mathfrak{S}_t(n)n^{t/2-1} + o(P^{t-2-J})$$

gdzie

$$|o(P^{t-2-J})| \leq 2^t\big(4^t + 2^{9/2-J}\Gamma(3/2)^t\big)(1+\frac{1}{2P})^t P^{t-2-J-1/2}$$

$$+2^{t+7}\Gamma(3/2)^t P^{t-2-J-1/2}\big((1+\frac{1}{2P})^t+1\big)$$

$$+2^{2t-J+2}\Gamma(3/2)^t\pi^{-1-J}\cdot 3^3 \sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot P^{t-2-J-1/2}.$$

Dowód. Załóżmy, że $w \geq 1$, wówczas z równości (6.4) oraz lematu 6.8 dla $u = t-w+v$, $l = w-v$ zachodzi

$$\mathfrak{F}_{t,w}(n) = 2^t\frac{\Gamma(3/2)^t}{\Gamma(t/2)}\mathfrak{S}_t(n)n^{t/2-1}\cdot\sum_{v=0}^{w}(-1)^v\binom{w}{v} + o_1(P^{t-2-J}) \qquad (7.1)$$

gdzie

$$|o_1(P^{t-2-J})| \leq 2^{t+w}\big(4^t + 2^{9/2-J}\Gamma(3/2)^t\big)(1+\frac{1}{2P})^t P^{t-2-J-1/2}$$

$$+2^{t+w+7}\Gamma(3/2)^t(1+\frac{1}{2P})^t P^{t-2-J-1/2}$$

$$+2^{2t+w-J+2}\Gamma(3/2)^t\pi^{-1-J}\cdot 3^3\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1+1}\cdot P^{t-2-J-1/2}$$
$$+2^{t+w+7}\Gamma(3/2)^tP^{t-2-J-1/2}.$$

By uzyskać powyższe szacowanie skorzystaliśmy z faktu, że $u, l \leq u+l=t$, z tego że zachodzi $\Gamma(x) \geq 1/4$ dla $x>0$ oraz równości $\sum_{v=0}^{w}\binom{w}{v}=2^w$.Ponieważ $w \geq 1$,to

$$\sum_{v=0}^{w}(-1)^v\binom{w}{v}=0.$$

W przypadku gdy $w=0$ teza wynika wprost z lematu 6.8 $\square$

Twierdzenie 7.2. *Dla $s, n \in \mathbb{Z}$ $s \geq \max(4J+5, 6)$, $n \geq 9$ zachodzi poniższy wzór asymptotyczny*

$$R_s(n)=n^{s/2-1}(\mathfrak{C}_0+\mathfrak{C}_1n^{-1/2}+...+\mathfrak{C}_Jn^{-J/2})+o(n^{(s-J)/2-1}) \tag{7.2}$$

gdzie dla $0 \leq j \leq J$ mamy

$$\mathfrak{C}_j=(-\frac{1}{2})^j\binom{s}{j}\frac{\Gamma(3/2)^{s-j}}{\Gamma((s-j)/2)}\mathfrak{S}_{s-j}(n)$$

oraz

$$|o(n^{(s-J)/2-1})| \leq (1+2n^{1/2})^{s-J-3}+\Big(\sum_{r=0}^{J+2}\binom{s}{r}\Big)\cdot\Big(1+2^s\cdot n^{s/2-1}\Big(\frac{331\log(2n^{1/2})}{n^{1/2}-2}\Big)^{\frac{s-4}{2}}(1+D(n))\Big)$$

$$+n^{(s-J)/2-\frac{5}{4}}(\frac{\log(n)}{2}+1)(2\log(n)+39.5)^s\cdot\sum_{r=0}^{J+2}\binom{s}{r}2^{4-r}(2\log(n)+39.5)^{-r}$$

$$+\sum_{r=0}^{J}\binom{s}{r}\sum_{l=0}^{2J-2r}\binom{s-r}{l}2^l\cdot\Big(\big(4^s+2^{9/2-J}\Gamma(3/2)^s\big)(1+\frac{1}{2n^{1/2}})^sn^{(s-J)/2-\frac{5}{4}}$$

$$+2^7\Gamma(3/2)^sn^{(s-J)/2-\frac{5}{4}}\big((1+\frac{1}{2n^{1/2}})^s+1\big)$$

$$+2^{s-J+2}\Gamma(3/2)^s\pi^{-1-J}\cdot 3^3\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot n^{(s-J)/2-\frac{5}{4}}\Big),$$

przy czym $D(x)$ jest podane w definicji 2.9

Dowód. Zauważmy, że dla $0 \le r \le J$ oraz $s \ge 4J+5$ z lematu 7.1 zachodzi

$$\sum_{l=0}^{2J-2r} \binom{s-r}{l} \mathfrak{F}_{s-r,l}(n) = 2^{s-r} \frac{\Gamma(3/2)^{s-r}}{\Gamma((s-r)/2)} \mathfrak{S}_{s-r}(n) n^{(s-r)/2-1} + o_2(P^{s-2-J})$$

gdzie

$$|o_2(P^{s-2-J})| \le \Big(2^s \big(4^s + 2^{9/2-J}\Gamma(3/2)^s\big)(1+\frac{1}{2P})^s P^{s-2-J-1/2}$$

$$+2^{s+7}\Gamma(3/2)^s P^{s-2-J-1/2}\big((1+\frac{1}{2P})^s + 1\big)$$

$$+2^{2s-J+2}\Gamma(3/2)^s \pi^{-1-J} \cdot 3^3 \sum_{m_1+2m_2=J+1} \frac{(J+1)!}{m_1! m_2!} 2^{m_1+1} \cdot P^{s-2-J-1/2}\Big) \cdot \sum_{l=0}^{2J-2r} \binom{s-r}{l} 2^l.$$

Korzystając z wniosku 4.10 ostatecznie otrzymujemy

$$R_s(n) = \sum_{r=0}^{J} (-\frac{1}{2})^r \binom{s}{r} 2^{s-r} \frac{\Gamma(3/2)^{s-r}}{\Gamma((s-r)/2)} \mathfrak{S}_{s-r}(n) n^{(s-r)/2-1} + o(P^{s-2-J})$$

gdzie

$$|o(P^{s-2-J})| \le |o_1(P^{s-2-J})| + 2^{-s} \sum_{r=0}^{J} \binom{s}{r} |o_2(P^{s-2-J})|,$$

przy czym o_1 jest błędem asymptotycznym z równości (4.7), korzystając z tożsamości $P = n^{1/2}$ otrzymujemy tezę □

8 Analiza szeregu singularnego

Naszym ostatnim celem będzie sprowadzienie wzoru z twierdzenia 7.2 do postaci multiplikatywnej, czyli wywnioskowanie twierdzenia 1.3. Aby tego dokonać musimy dokładniej przeanalizować szereg singularny $\mathfrak{S}_t(n)$.

Lemat 8.1. *Załóżmy, że $(a,q) = (b,r) = (q,r) = 1$, wówczas zachodzi poniższa tożsamość*

$$S(qr, ar+bq) = S(q,a)S(b,r).$$

Dowód. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że odwzorowanie $tr+uq \mod qr \mapsto (t \mod q, u \mod r)$ jest bijekcją między klasami reszt modulo

qr, a uporządkowanymi parami klas reszt odpowiednio modulo q, modulo r. Wówczas otrzymujemy

$$S(qr, ar+bq) = \sum_{m=1}^{qr} e\Big(\frac{ar+bq}{qr}m^2\Big) = \sum_{t=1}^{q}\sum_{u=1}^{r} e\Big(\frac{(ar+bq)(tr+uq)^2}{qr}\Big)$$

$$= \sum_{t=1}^{q}\sum_{u=1}^{r} e\Big(\frac{a}{q}(tr)^2 + \frac{b}{r}(uq)^2\Big) = S(q,a)S(b,r)$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z faktu, że ponieważ $(q,r)=1$, to odwzorowanie $tr \mapsto t'$ jest bijekcją modulo q, analogicznie $uq \mapsto u'$ jest bijekcją modulo r. $\square$

Definicja 8.2. Dla $q, n, s \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$A_s(q,n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^{q} \big(q^{-1}S(q,a)\big)^s e(-na/q).$$

Lemat 8.3. *Dla* $(q,r)=1$ *zachodzi*

$$A_s(qr,n) = A_s(q,n)\cdot A_s(r,n)$$

Dowód. Z chińskiego twierdzenia o resztach wynika, że istnieje bijekcja między klasami reszt a modulo qr, gdzie $(a,qr)=1$, a uporządkowanymi parami klas reszt (b,c) odpowiednio modulo q, modulo r spełniającymi $(b,q) = (c,r) = 1$, taka że zachodzi $a \equiv br + cq \pmod{qr}$. Wówczas otrzymujemy

$$A_s(qr,n) = \sum_{\substack{a=1 \\ (a,qr)=1}}^{qr} \big((qr)^{-1}S(qr,a)\big)^s e(-na/(qr))$$

$$= \sum_{\substack{b=1 \\ (b,q)=1}}^{q} \sum_{\substack{r=1 \\ (c,r)=1}}^{r} \big((qr)^{-1}S(qr,br+cq)\big)^s e(-\frac{br+cq}{qr}n).$$

Korzystając z lematu 8.1 mamy

$$A_s(qr,n) = \sum_{\substack{b=1 \\ (b,q)=1}}^{q} \sum_{\substack{r=1 \\ (c,r)=1}}^{r} \big(q^{-1}S(q,b)\big)^s \big(r^{-1}S(r,c)\big)^s e(-bn/q)e(-cn/r) = A_s(q,n)\cdot A_s(r,n).$$

$\square$

Zauważmy, że zachodzi

$$\mathfrak{S}_s(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A_s(q,n) \tag{8.1}$$

Dla liczby pierwszej p definiujemy

$$\sigma_s(p) = \sum_{h=0}^{\infty} A_s(p^h,n) \tag{8.2}$$

Naszym kolejnym celem będzie korzystając z lematu 8.3 rozwinięcie szeregu singularnego $\mathfrak{S}_s(n)$ w nieskończony iloczyn, by łatwiej można było oszacować jego wartość.

Lemat 8.4. *Dla $s \geq 6$, dowolnego $n \in \mathbb{N}$, liczby pierwszej p zachodzi*

$$|\sigma_s(p) - 1| \leq \frac{1}{p^2-1}.$$

Dowód. Rozważmy najpierw $p \neq 2$, z lematu 4.2 dla $h \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$|A_s(p^h,n)| \leq \sum_{\substack{a=1 \\ (a,p^h)=1}}^{p^h} \left|p^{-h} S(p^h,a)\right|^s \leq p^h \cdot p^{-hs} \cdot p^{hs/2} = p^{(1-s/2)h},$$

stąd mamy

$$|\sigma_s(p) - 1| \leq \sum_{h=1}^{\infty} |A_s(p^h,n)| \leq \sum_{h=1}^{\infty} \left(p^{(1-s/2)}\right)^h = \frac{1}{p^{s/2-1}-1} \leq \frac{1}{p^2-1}.$$

W ostatniej nierówności skorzystaliśmy z założenia $s \geq 6$. Teraz rozważmy przypadek $p = 2$. Zauważmy, że zachodzi

$$S(2,1) = \sum_{x=1}^{2} e(x^2/2) = e(1/2) + e(1) = 0,$$

stąd mamy

$$A_s(2,n) = (2^{-1}S(2,1))^s e(-n/2) = 0,$$

ponadto dla $h \geq 2$ z lematu 4.2 zachodzi

$$|A_s(2^h,n)| \leq \sum_{\substack{a=1 \\ (a,2^h)=1}}^{2^h} \left|2^{-h} S(2^h,a)\right|^s \leq 2^{h-1} \cdot 2^{-sh} \cdot 2^{s/2} \cdot 2^{hs/2} = 2^{(1-s/2)(h-1)}.$$

Wówczas otrzymujemy

$$|\sigma_s(2) - 1| \leq \sum_{h=2}^{\infty} |A_s(2^h, n)| \leq \sum_{h=2}^{\infty} \left(2^{1-s/2}\right)^{h-1} = \frac{1}{2^{s/2-1} - 1} \leq \frac{1}{2^2 - 1}.$$

□

Korzystając z [1] (Proposition 17.3) otrzymujemy dla $s \geq 6$ bezwzględną zbieżność iloczynu $\prod_{p \text{ pierwsze}} \sigma_s(p)$ do niezerowej wartości. Sosując równość 8.1 oraz zasadnicze twierdzenie arytmetyki otrzymujemy dla $s \geq 6$

$$\mathfrak{S}_s(n) = \prod_{p \text{ pierwsze}} \sigma_s(p).$$

Stosując lemat 8.4 uzyskujemy poniższy wniosek.

Wniosek 8.5. *Dla $s \geq 6$ oraz dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi*

$$C_1 \leq |\mathfrak{S}_s(n)| \leq C_2$$

gdzie

$$C_1 = \prod_{p \text{ pierwsze}} (1 - \frac{1}{p^2 - 1}) > 0$$

oraz

$$C_2 = \prod_{p \text{ pierwsze}} (1 + \frac{1}{p^2 - 1}).$$

To, że w powyższym wniosku mamy $C_1 > 0$ wynika z [1] (Proposition 17.3).

Lemat 8.6. *Dla $J \geq 1$ $s \geq 4J + 5$, $0 \leq j \leq J$, $n \geq e^{1/3}\big(C_2 C_1^{-1}(J+1)\big)^2 s^3$ zachodzi*

$$\frac{|\mathfrak{C}_0|}{|\mathfrak{C}_j n^{-j/2}|} \geq J + 1.$$

Dowód. Zachodzi

$$\frac{|\mathfrak{C}_0|}{|\mathfrak{C}_j n^{-j/2}|} = \frac{|\mathfrak{S}_s(n)|}{|\mathfrak{S}_{s-j}(n)|} \cdot 2^j \Gamma(3/2)^j n^{j/2} \frac{\Gamma((s-j)/2)}{\Gamma(s/2)\binom{s}{j}}.$$

Dla $x > 0$ prawdziwe są poniższe nierówności (dowód jest przedstawiony w [2])

$$\sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \leq \Gamma(x) \leq \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} e^{1/(12x)}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{\Gamma((s-j)/2)}{\Gamma(s/2)} \geq \frac{\big((s-j)/2\big)^{(s-j)/2-1/2} e^{-(s-j)/2}}{\big(s/2\big)^{s/2-1/2} e^{-s/2}} \cdot e^{-1/(6s)}$$

$$= e^{-1/(6s)} e^{j/2} \big(\frac{s}{2}\big)^{-j/2} \Big(\frac{(s-j)/2}{s/2}\Big)^{(s-j)/2} \sqrt{\frac{s}{s-j}}.$$

Zauważmy, że dla $a, x \geq 0$ zachodzi $e^{a/x} \geq 1 + \frac{a}{x}$, co implikuje $e^a \geq (1 + \frac{a}{x})^x$, zatem mamy

$$\Big(\frac{s/2}{(s-j)/2}\Big)^{(s-j)/2} = \Big(1 + \frac{j/2}{(s-j)/2}\Big)^{(s-j)/2} \leq e^{j/2},$$

stąd otrzymujemy

$$e^{-1/(6s)} e^{j/2} \big(\frac{s}{2}\big)^{-j/2} \Big(\frac{(s-j)/2}{s/2}\Big)^{(s-j)/2} \sqrt{\frac{s}{s-j}}$$

$$\geq e^{-1/6} e^{j/2} \cdot \big(\frac{s}{2}\big)^{-j/2} \cdot e^{-j/2} \cdot 1 = e^{-1/6} (s/2)^{-j/2}.$$

Wówczas korzystając z oszacowania $\binom{s}{j} \leq s^j$ oraz faktu, że $2 \cdot \Gamma(3/2) = \Gamma(1/2) \geq 1$ zachodzi

$$\frac{|\mathfrak{S}_s(n)|}{|\mathfrak{S}_{s-j}(n)|} \cdot 2^j \Gamma(3/2)^j n^{j/2} \frac{\Gamma((s-j)/2)}{\Gamma(s/2)\binom{s}{j}}$$

$$\geq C_1 C_2^{-1} 2^j \Gamma(3/2)^j e^{-1/6} s^{-3j/2} \cdot 2^{j/2} n^{j/2}$$

$$\geq e^{-1/6} C_1 C_2^{-1} \big(n^{1/2} s^{-3/2}\big)^J \geq e^{-1/6} C_1 C_2^{-1} n^{1/2} s^{-3/2} \geq J + 1.$$

□

Korzystając z lematu 8.6 możemy sprowadzić wzór asymptotyczny (7.2) do postaci multiplikatywnej

Twierdzenie 8.7. *Dla* $s \geq \max(4J+5, 6)$, $n \geq e^{1/3}\big(C_2 C_1^{-1}(J+1)\big)^2 s^3$ *zachodzi*

$$n^{s/2-1}(\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 n^{-1/2} + ... + \mathfrak{C}_J n^{-J/2})(1 + o(n^{-J/2})) \tag{8.3}$$

gdzie dla $0 \leq j \leq J$ *mamy*

$$\mathfrak{C}_j = (-\frac{1}{2})^j \binom{s}{j} \frac{\Gamma(3/2)^{s-j}}{\Gamma((s-j)/2)} \mathfrak{S}_{s-j}(n)$$

oraz

$$|o(n^{-J/2})| \le (J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s}n^{1-s/2}|o_1(n^{(s-J)/2-1})|$$

przy czym $o_1(n^{(s-J)/2-1})$ *jest błędem asymptotycznym z twierdzenia 7.2.*

Dowód. Niech $o_1(n^{(s-J)/2})$ będzie błędem asymptotycznym z twierdzenia 7.2, wówczas zachodzi

$$o(n^{-J/2}) = \Big(n^{s/2-1}(\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 n^{-1/2} + ... + \mathfrak{C}_J n^{-J/2})\Big)^{-1} o_1(n^{(s-J)/2-1})$$

Załóżmy najpierw, że $J \ge 1$. Korzystając z lematu 8.6 mamy

$$\Big|\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 n^{-1/2} + ... + \mathfrak{C}_J n^{-J/2}\Big| \ge |\mathfrak{C}_0| - \sum_{j=1}^{J}|\mathfrak{C}_j n^{-j/2}|$$

$$\ge \frac{1}{J+1}|\mathfrak{C}_0| \ge \frac{1}{J+1}\frac{\Gamma(3/2)^s}{\Gamma(s/2)}C_1.$$

Stąd mamy

$$|o(n^{-J/2})| \le (J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s}n^{1-s/2}|o_1(n^{(s-J)/2-1})|$$

Natomiast jeśli $J = 0$, to powyższe szacowanie jest również prawdziwe, bo w dokładnie ten sam sposób szacujemy $|\mathfrak{C}_0|^{-1}$, przy czym nie musimy się wtedy odwoływać do lematu 8.6. □

Uwaga 8.8. W twierdzeniu 8.7 błąd asymptotyczny szacuje się bezpośrednio w następujący sposób

$$|o(n^{-J/2})| \le$$

$$(J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s}\cdot\Big((n^{-1/2}+2)^{s-2}(1+2n^{1/2})^{-J-1}+$$

$$\Big(\sum_{r=0}^{J+2}\binom{s}{r}\Big)\cdot\Big(1+2^s\cdot\Big(\frac{331\log(2n^{1/2})}{n^{1/2}-2}\Big)^{\frac{s-4}{2}}(1+D(n))\Big)+$$

$$+n^{-J/2-\frac{1}{4}}(\frac{\log(n)}{2}+1)(2\log(n)+39.5)^s\cdot\sum_{r=0}^{J+2}\binom{s}{r}2^{4-r}(2\log(n)+39.5)^{-r}$$

$$+\sum_{r=0}^{J}\binom{s}{r}\sum_{l=0}^{2J-2r}\binom{s-r}{l}\Big(\big(4^s+2^{9/2-J}\Gamma(3/2)^s\big)(1+\frac{1}{2n^{1/2}})^s n^{-J/2-\frac{1}{4}}$$

$$+2^7\Gamma(3/2)^s n^{-J/2-\frac{1}{4}}\big((1+\frac{1}{2n^{1/2}})^s+1\big)$$

$$+2^{s-J+2}\Gamma(3/2)^s\pi^{-1-J}\cdot 3^3\sum_{m_1+2m_2=J+1}\frac{(J+1)!}{m_1!m_2!}2^{m_1}\cdot n^{-J/2-\frac{1}{4}}\Big)\Big)$$

gdzie

$$C_1=\prod_{p\ \text{pierwsze}}(1-\frac{1}{p^2-1})$$

oraz

$$D(n)=\sup_{k\in\mathbb{N},k\leq n} d(k).$$

9 Końcowe komentarze

Zauważmy, że wyrazem największego rzędu w uwadze 8.8 jest składnik

$$(J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s}\cdot n^{-J/2-\frac{1}{4}}(\frac{\log(n)}{2}+1)(2\log(n)+39.5)^s\cdot 2^4.$$

Dla $n\geq(2s)^{8s}\cdot\frac{1}{\Gamma(3/2)^{16s}}(16(s+1))^{16(s+1)}$ zachodzi

$$\Gamma(s/2)\frac{1}{\Gamma(3/2)^s}\cdot 2^s\log(n)^{s+1}\leq\frac{1}{\Gamma(3/2)^s}\sqrt{2\pi}(s/2)^{s/2}e^{1/(6s)}2^s\cdot\log(n)^{s+1}$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(3/2)^s}\sqrt{2\pi}e^{1/6}(2s)^{s/2}(16(s+1)\log(n^{\frac{1}{16(s+1)}}))^{s+1}$$

$$\leq\frac{1}{\Gamma(3/2)^s}\sqrt{2\pi}e^{1/6}(2s)^{s/2}(16(s+1))^{(s+1)}n^{1/16}\leq\sqrt{2\pi}e^{1/6}n^{1/8}.$$

Stąd wynika, że

$$(J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s}\cdot n^{-J/2-\frac{1}{4}}(\frac{\log(n)}{2}+1)(2\log(n)+39.5)^s\cdot 2^4$$

$$\leq C_3 n^{-J/2-1/8}\cdot(1+\frac{20}{\log(n)})^{s+1}$$

dla pewnej stałej $C_3>0$, natomiast mamy

$$(1+\frac{20}{\log(n)})^{s+1}\leq(1+\frac{20}{16(s+1)\log(s+1)})^{s+1}\leq e^{\frac{20}{16\log(s+1)}}<e,$$

czyli dla $n \geq (2s)^{8s} \cdot \frac{1}{\Gamma(3/2)^{16s}} \cdot (16(s+1))^{16(s+1)}$ zachodzi

$$(J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s} \cdot n^{-J/2-\frac{1}{4}}(\frac{\log(n)}{2}+1)(2\log(n)+39.5)^s \cdot 2^4 \leq cn^{-J/2-\frac{1}{8}}$$

gdzie $c > 0$ jest stałą niezależną od s, w podobny sposób da się oszacować pozostałe składniki i po ewentualnym powiększeniu stałej $c > 0$ można dojść do wniosku, że dla $n \geq (2s)^{8s} \cdot \frac{1}{\Gamma(3/2)^{16s}} \cdot (16(s+1))^{16(s+1)}$ mamy

$$|o(n^{-J/2})| \leq cn^{-J/2-1/8}$$

powyższe oszacowanie jest dalekie od optymalnego. Natomiast z drugiej strony dla $n = (s+1)^{4(s+1)}$ otrzymujemy

$$(J+1)C_1^{-1}\frac{\Gamma(s/2)}{\Gamma(3/2)^s} \cdot n^{-J/2-\frac{1}{4}}(\frac{\log(n)}{2}+1)(2\log(n)+39.5)^s \cdot 2^4 \geq$$

$$\geq n^{-J/2-\frac{1}{4}}2^{s-1}\log(n)^{s+1} \geq n^{-J/2}2^{s-1}.$$

Zatem aby mieć pewność, że zachodzi $|o(n^{-J/2}) \cdot n^{J/2}| \leq 1$ musimy rozważać $n > (s+1)^{4(s+1)}$, co jest dosyć dużym ograniczeniem.

Literatura

[1] Joseph Bak and Donald Newman. *Complex analysis. 3rd ed.* 01 2010.

[2] John A. Gubner. The gamma function and stirling's formula. https://gubner.ece.wisc.edu/notes/GammaFunctionStirling.pdf, 2021.

[3] Littlewood J. E. Hardy, G. H. Some problems of 'partitio numerorum'; i: A new solution of waring‘s problem. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1920:33–54, 1920.

[4] David R. Hilbert. Beweis für die darstellbarkeit der ganzen zahlen durch eine feste anzahl n ter potenzen (waringsches problem). *Mathematische Annalen*, 67:510–527, 1932.

[5] Warren P. Johnson. The curious history of faà di bruno's formula. *The American Mathematical Monthly*, 109(3):217–234, 2002.

[6] Hugh L. Montgomery and Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I: Classical Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2006.

[7] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1976.

[8] Robert C. Vaughan and Trevor D. Wooley. The asymptotic formula in waring's problem: Higher order expansions. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2018(742):17–46, 2018.