Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: teoretyczna

Maciej Korpalski

Kombinatoryczna charakteryzacja współczynnika pokryciowego dla ideału zbiorów miary zero

Praca licencjacka
napisana pod kierunkiem
doktora Jana Kraszewskiego

Wrocław 2020

Spis treści

1 Wstęp

Poniższa praca ma na celu uporządkowanie i uproszczenie ciągu dowodowego prowadzącego do Twierdzenia 2.5.12 z [2], określonego w tej pracy jako Twierdzenie 3.12. Twierdzenie to jest tytułową charakteryzacją. W tym celu w pracy wprowadzane jest pojęcie zbiorów małych będących rodziną zbiorów miary zero o potrzebnych własnościach kombinatorycznych. Poza tym w pracy pojawia się kilka podstawowych faktów dotyczących zbiorów małych.

Wszystkie zawarte w pracy twierdzenia i lematy pochodzą z podrozdziału 2.5 z [2], przy czym ich dowody często zawierały w tej książce istotne luki i niedomówienia. Szczególnie istotne było tu niedomówienie w dowodzie Twierdzenia 2.5.8 (w tej pracy Twierdzenie 3.8), które nie było proste do poprawienia. Dowód Lematu 3.5 został zaczerpnięty z [3], został też poddany niewielkim modyfikacjom. Pojęcia używane w pracy pierwszy raz pojawiły się w [1].

2 Potrzebne pojęcia

Oznaczenia używane w tej pracy zostały zaczerpnięte z [2], w tym rozdziale są one skrótowo przedstawione.

Zbiór liczb naturalnych może być oznaczany przez ω lub $\mathbb{N}$, przy czym to drugie oznaczenie jest używane przy numerowaniu indeksów. Liczbę naturalną $n \in \omega$ rozumiemy także jako zbiór $\{0, 1, ..., n-1\}$, czyli wszystkich liczb naturalnych mniejszych od niej. Kwantyfikatory $\forall^\infty$ i $\exists^\infty$ będą oznaczały odpowiednio „dla prawie wszystkich” oraz „dla nieskończenie wielu”, przy czym są one używane tylko w odniesieniu do liczb naturalnych.

Symbolem X^Y oznaczany będzie zbiór funkcji z Y w X. Gdy κ jest liczbą kardynalną, wprowadźmy oznaczenie $X^{<\kappa} = \bigcup_{\xi<\kappa} X^\xi$. O elementach X^κ można też mówić jako o ciągach. Przez $[X]^\kappa$ będziemy rozumieli rodzinę wszystkich podzbiorów X o mocy κ oraz oznaczmy $[X]^{<\kappa} = \bigcup_{\xi<\kappa}[X]^\xi$. Dla ciągu $s \in X^{<\omega}$ wprowadźmy oznaczenie $[s] = \{f \in X^\omega : s \subseteq f\}$, czyli zbiór wszystkich rozszerzeń ciągu s do dziedziny ω. Dla funkcji $f \in X^A$ obcięciem funkcji do zbioru B takiego, że $B \cap A \neq \emptyset$ rozumiemy $f{\restriction}B = f \cap ((A \cap B) \times X)$. Dla $f \in X^\xi$ i $\kappa > \xi$ można mówić o rozszerzeniach f do κ, czyli o ciągach $g \in X^\kappa$ takich, że $f = g{\restriction}\xi$.

Definicja 2.1. ***Podziałem*** *zbioru X nazywamy rodzinę $I \subseteq P(X) \setminus \{\emptyset\}$ taką, że $\forall i, j \in I\ i \cap j = \emptyset$ oraz $\bigcup I = X$.*
Podział I nazywamy ***drobniejszym*** *od J, gdy zachodzi warunek $\forall i \in I\ \exists j \in J\ i \subseteq j$.*

Podział I może zostać ponumerowany w ustalony sposób. Zapisujemy wtedy $I = (I_t)_{t\in T}$. W poniższej pracy najczęściej rozważane będzie indeksowanie za pomocą zbioru liczb naturalnych, wtedy piszemy $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Przez większość poniższej pracy rozważany będzie zbiór Cantora 2^ω. Na nim wprowadzona jest standardowa topologia produktowa, której bazą są zbiory otwarto-domknięte $[s]$ dla $s \in 2^n$. Na tej przestrzeni wprowadzona jest też miara produktowa μ, spełniająca warunek $\mu([s]) = 2^{-n}$ dla $s \in 2^n$.

Lemat 2.2. *(Borel-Cantelli)* [4, Tw. 4.3] Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią miarową probabilistyczną oraz $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem mierzalnych podzbiorów tej przestrzeni. Wtedy jeśli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty,$$

to zachodzi

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Definicja 2.3. *Niech X będzie niepustym zbiorem. Rodzinę $I \subseteq P(X)$ nazywamy* ***ideałem****, gdy spełnia ona następujące warunki:*

- $A \cap B \in I$ *dla* $A, B \in I$,
- $B \in I$, *gdy* $B \subseteq A$ *i* $A \in I$,
- $\emptyset \in I, X \notin I$

Dla ideałów rozważa się różne współczynniki kardynalne odpowiadające pewnym ich własnościom, poniżej będziemy rozważać współczynnik pokryciowy ideału:

$$\mathrm{cov}(I) = \min\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \subseteq I \wedge \bigcup \mathcal{A} = \bigcup I\}.$$

W tej pracy będziemy badali własności ideału zbiorów miary zero $\mathcal{N} = \{X \subseteq 2^\omega : \mu(X) = 0\}$.

Dla $f, g \in \omega^\omega$ zdefiniujmy preporządek $f \leqslant^* g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) \leqslant g(n)$ dla prawie wszystkich $n \in \omega$. Z tym porządkiem związane są następujące liczby kardynalne:

$$\mathfrak{b} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega \wedge \forall g \in \omega^\omega\ \exists f \in F\ f \nleqslant^* g\} \text{ oraz}$$

$$\mathfrak{d} = \min\{|F| : F \subseteq \omega^\omega \wedge \forall g \in \omega^\omega\ \exists f \in F\ g \leqslant^* f\}.$$

Są to odpowiednio moc najmniejszej nieograniczonej rodziny oraz najmniejszej rodziny dominującej w ω^ω z porządkiem $\leqslant^*$.

3 Zbiory małe

W tej pracy prezentowana jest częściowa charakteryzacja współczynnika pokryciowego $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$. W celu jej wprowadzenia potrzebna jest rodzina zbiorów miary zero o odpowiednich właściwościach kombinatorycznych. Do tego celu potrzebny nam będzie następujący lemat:

Lemat 3.1. *Przypuśćmy, że zbiór $G \subseteq 2^\omega$ jest miary zero. Istnieje wtedy ciąg $\langle F_n : n \in \omega\rangle$ taki, że $F_n \subseteq 2^n$ dla $n \in \omega$, $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n| \cdot 2^{-n} < \infty$ oraz $G \subseteq \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n\ x{\restriction}n \in F_n\}$.*

Dowód. Skoro G ma miarę zero, to istnieje ciąg zbiorów otwartych $\langle G_n : n \in \omega\rangle$ pokrywający G taki, że $\mu(G_n) < 2^{-n}$ dla $n \in \omega$ oraz $G \subseteq \bigcap_{n\in\omega} G_n$. Zapiszmy G_n jako rozłączną sumę otwartych zbiorów bazowych:

$$G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} [s_m^n] \text{ dla } n \in \omega,$$

gdzie dla każdych $n, m \in \omega$ mamy $s^n_m \in 2^k$ dla pewnego $k \in \omega$.
Przyjmijmy $F_n = \{s \in 2^n : (\exists k, l \in \omega)\ s = s^k_l\}$ dla $n \in \omega$. Mamy

$$\sum_{n\in\omega} |F_n| \cdot 2^{-n} \leqslant \sum_{n\in\omega} \mu(G_n) \leqslant 1$$

Jeśli $x \in G$, to $x \in \bigcap_{n\in\omega} G_n$. W takim razie warunek $x{\restriction}n \in F_n$ musi zachodzić dla nieskończenie wielu n. $\triangle$

Powyższa reprezentacja zbiorów miary zero ma tę wadę, że dziedziny ciągów należących do F_n nie są rozłączne dla różnych n. W celu uzyskania podobnej reprezentacji używającej ciągów o rozłącznych dziedzinach wprowadzamy następującą definicję:

Definicja 3.2. *Zbiór $G \subseteq 2^\omega$ nazywamy **małym**, jeśli istnieją podział $(I_n)_{n=1}^\infty$ zbioru ω na parami rozłączne skończone zbiory oraz rodzina $(J_n)_{n=1}^\infty$ spełniające warunki:*

1. *$J_n \subseteq 2^{I_n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,*
2. *$G \subseteq \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \in \mathbb{N}\ x{\restriction}I_n \in J_n\}$ oraz*
3. *$\sum_{n\in\mathbb{N}} |J_n| \cdot 2^{-|I_n|} < \infty$.*

Należy przy tym zaznaczyć, że kluczowe są dla nas zbiory postaci $\{x \in 2^\omega : \exists^\infty n \in \mathbb{N}\ x{\restriction}I_n \in J_n\}$, które oznaczamy jako $(I_n, J_n)_{n=1}^\infty$. Zbiorami małymi są także są ich podzbiory, lecz w dalszej części pracy najczęściej będą wykorzystywane zbiory tej postaci.

Z Lematu Borela-Cantellego wynika, że warunek (3) jest wystarczający i konieczny, żeby mały zbiór był miary zero.

Lemat 3.3. *Przypuśćmy, że $(I^1_n, J^1_n)_{n=1}^\infty$ oraz $(I^2_n, J^2_n)_{n=1}^\infty$ są dwoma zbiorami małymi. Jeśli $(I^1_n)_{n=1}^\infty$ jest drobniejszym podziałem niż $(I^2_n)_{n=1}^\infty$, to $(I^1_n, J^1_n)_{n=1}^\infty \cup (I^2_n, J^2_n)_{n=1}^\infty$ jest zbiorem małym.*

Dowód. Skonstruujmy zbiór mały, który będzie zawierał zbiory $(I^1_n, J^1_n)_{n=1}^\infty$ i $(I^2_n, J^2_n)_{n=1}^\infty$. Jako podział przyjmiemy $(I^2_n)_{n=1}^\infty$, a rodzinę $(J^3_n)_{n=1}^\infty$ zdefiniujemy następująco:

$$J^3_n = J^2_n \cup \{s \in 2^{I^2_n} : (\exists k \in \mathbb{N})(I^1_k \subseteq I^2_n\ \wedge\ s{\restriction}I^1_k \in J^1_k)\} \subseteq 2^{I^2_n}.$$

Pokażemy, że $(I^2_n, J^3_n)_{n=1}^\infty$ jest zbiorem małym oraz że zawiera zbiór $(I^1_n, J^1_n)_{n=1}^\infty \cup (I^2_n, J^2_n)_{n=1}^\infty$.
Dla każdego n mamy $J^3_n \subseteq 2^{I^2_n}$, więc należy sprawdzić, czy $\sum_{n\in\mathbb{N}} |J^3_n| \cdot 2^{-|I^2_n|} < \infty$. Przy ustalonym $n \in \mathbb{N}$ niech $A_n = \{k \in \mathbb{N} : I^1_k \subseteq I^2_n\}$. Mamy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |J^3_n| \cdot 2^{-|I^2_n|} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (|J^2_n| + \sum_{k\in A_n} |J^1_k| \cdot 2^{|I^2_n| - |I^1_k|}) \cdot 2^{-|I^2_n|} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |J^2_n| \cdot 2^{-|I^2_n|} + \sum_{k\in\mathbb{N}} |J^1_k| \cdot 2^{-|I^1_k|} < \infty,$$

w przekształceniach korzystając z tego, że podział $(I^1_n)_{n=1}^\infty$ jest drobniejszy niż $(I^2_n)_{n=1}^\infty$.
W celu pokazania zawierania weźmy $x \in (I^1_n, J^1_n)_{n=1}^\infty \cup (I^2_n, J^2_n)_{n=1}^\infty$. Są dwie możliwości:

- $x \in (I^1_n, J^1_n)_{n=1}^\infty$, istnieje wtedy nieskończenie wiele k takich, że $x{\restriction}I^1_k \in J^1_k$ i dla każdego z nich istnieje dokładnie jedno n spełniające warunek $I^1_k \subseteq I^2_n$; mamy wtedy $x{\restriction}I^2_n \in J^3_n$ dla nieskończenie wielu n, czyli $x \in (I^2_n, J^3_n)_{n=1}^\infty$.

- $x \in (I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$, istnieje wtedy nieskończenie wiele n takich, że $x \upharpoonright I^2_n \in J^2_n$ i w takim razie $x \upharpoonright I^2_n \in J^3_n$, czyli $x \in (I^2_n, J^3_n)^\infty_{n=1}$.

Co kończy dowód. $\triangle$

Wniosek 3.4. *Jeśli $(I^1_n, J^1_n)^\infty_{n=1}$ i $(I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$ są zbiorami małymi i istnieje podział $(I^3_n)^\infty_{n=1}$ taki, że $(I^1_n)^\infty_{n=1}$ oraz $(I^2_n)^\infty_{n=1}$ są drobniejsze od niego, to suma $(I^1_n, J^1_n)^\infty_{n=1} \cup (I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$ jest zbiorem małym.*

Dowód. W celu pokazania powyższego wniosku należy postępować dla obu zbiorów tak, jak w dowodzie Lematu 3.3 dla pierwszego z nich. $\triangle$

Do dalszych twierdzeń potrzebna nam będzie następująca własność:

Lemat 3.5. *Przypuśćmy, że $(I^1_n, J^1_n)^\infty_{n=1}$ i $(I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$ są zbiorami małymi. Zachodzi wtedy równoważność następujących warunków:*

1. $(I^1_n, J^1_n)^\infty_{n=1} \subseteq (I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$

2. *dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz dla każdego $s \in J^1_n$ istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że*

   (a) $I^1_n \cap I^2_k \neq \emptyset$,

   (b) $\forall t \in 2^{I^2_k}\ ((t \upharpoonright I^1_n = s \upharpoonright I^2_k) \Rightarrow (t \in J^2_k))$.

Dowód. 2. $\to$ 1. Ustalmy $x \in (I^1_n, J^1_n)^\infty_{n=1}$. Istnieje wtedy nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ takich, że $x \upharpoonright I^1_n \in J^1_n$. Dla prawie wszystkich z tych n istnieje k_n spełniające warunki (a) i (b). Wtedy dla każdego k_n istnieje $t \in J^2_{k_n}$ takie, że $x \upharpoonright I^2_{k_n} = t$. Co dowodzi, że $x \in (I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$.

$\neg$2. $\to \neg$1. Zakładamy tu negację warunku 2. i skonstruujemy element $x \in (I^1_k, J^1_k)^\infty_{k=1} \setminus (I^2_n, J^2_n)^\infty_{n=1}$. Z założenia wynika istnienie nieskończonego zbioru $Y \subseteq \mathbb{N}$ takiego, że dla każdego $n \in Y$ istnieje $s_n \in J^1_n$ i dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ spełniającego warunek $I^1_n \cap I^2_k \neq \emptyset$ nie zachodzi zdanie (b), czyli

$$\exists t \in 2^{I^2_k}((t \upharpoonright I^1_n = s \upharpoonright I^2_k) \wedge (t \notin J^2_k)). \tag{*}$$

Zmniejszymy teraz zbiór Y do nieskończonego zbioru $Z = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ w taki sposób, żeby żaden ze zbiorów I^2_k nie miał części wspólnej z dwoma różnymi zbiorami I^1_n dla $n \in Z$. W tym celu ustalmy $z_1 = \min Y$ i dalej indukcyjnie

$$z_{n+1} = \min\{z \in Y : \forall i \leqslant n\ \forall j \in \mathbb{N}\ (I^1_i \cap I^2_j \neq \emptyset \Rightarrow I^1_z \cap I^2_j = \emptyset)\}$$

dla $n \geqslant 1$. Na każdym kroku zbiór, z którego brane jest minimum jest niepusty ze względu na nieskończoność zbioru Y oraz skończoność zbiorów I^1_n i I^2_k, więc zbiór Z jest dobrze określony.
Trzeba jeszcze ustalić konstruowany x dla $m \in \mathbb{N}$ spełniających warunek $I^2_m \cap (\bigcup_{n \in Z} I^1_n) = \emptyset$. Dla takich m ustalmy element $t_m \in 2^{I^2_m}$ taki, że $t_m \notin J^2_m$ (być może dla skończenie wielu m nie będzie można tego zrobić, wtedy t_m można ustalić dowolnie). Ustalmy więc $x \in 2^\omega$ następująco:

- $x \upharpoonright I^1_n = s_n$ dla $n \in Z$,

- $x \upharpoonright (I^2_k \setminus I^1_n) = t$, dla $n \in Z$ i $k \in \mathbb{N}$ takiego, że $I^1_n \cap I^2_k \neq \emptyset$, gdzie $t \in 2^{I^2_k}$ jest dowolnym elementem wziętym z warunku (*),

- $x{\restriction}I_k^2 = t_k$, gdy $I_k^2 \cap (\bigcup_{n\in Z} I_n^1) = \emptyset$.

Wtedy dla $n \in Z$ spełnione jest założenie $s \restriction I_n^1 \in J_n^1$, co oznacza, że $x \in (I_n^1, J_n^1)_{n=1}^\infty$, lecz dla prawie każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy $x{\restriction}I_k^2 \notin J_k^2$, czyli $x \notin (I_n^2, J_n^2)_{n=1}^\infty$. Co dowodzi tezy, gdyż w takim razie $(I_n^2, J_n^2)_{n=1}^\infty \nsubseteq (I_n^1, J_n^1)_{n=1}^\infty$. △

Jako wniosek otrzymujemy następujący lemat:

Lemat 3.6. *Przypuśćmy, że $(I_n^1, J_n^1)_{n=1}^\infty$ oraz $(I_n^2, J_n^2)_{n=1}^\infty$ są zbiorami małymi oraz $(I_n^1, J_n^1)_{n=1}^\infty \subseteq (I_n^2, J_n^2)_{n=1}^\infty$. Wtedy istnieje podział $(I_n^3)_{n=1}^\infty$ drobniejszy od $(I_n^1)_{n=1}^\infty$ i $(I_n^2)_{n=1}^\infty$ oraz rodzina J_n^3 taka, że*

$$(I_n^1, J_n^1)_{n=1}^\infty \subseteq (I_n^3, J_n^3)_{n=1}^\infty \subseteq (I_n^2, J_n^2)_{n=1}^\infty.$$

i zbiór $(I_n^3, J_n^3)_{n=1}^\infty$ jest mały.

Dowód. Oznaczmy jako $(I_l^3)_{l=1}^\infty$ rodzinę $\{I_n^1 \cap I_k^2 : n, k \in \mathbb{N}\} \setminus \{\emptyset\}$ zapisaną w ustalonym porządku. Dla $l \in \mathbb{N}$ takiego, że $I_l^3 = I_n^1 \cap I_k^2$ zdefiniujmy:

$$J_l^3 = \{s \in 2^{I_l^3} : (\forall t \in 2^{I_k^2})(s \subseteq t \Rightarrow t \in J_k^2)\},$$

czyli J_l^3 jest rodziną tych ciągów z $2^{I_l^3}$, których wszystkie rozszerzenia z $2^{I_k^2}$ należą do J_k^2.

Jeśli zbiór $(I_l^3, J_l^3)_{l=1}^\infty$ jest podzbiorem zbioru małego $(I_k^2, J_k^2)_{k=1}^\infty$, to także jest zbiorem małym. Wystarczy w takim razie pokazać obie inkluzje z treści Lematu.

Ustalmy $x \in (I_l^3, J_l^3)_{l=1}^\infty$. Istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych $(l_n)_{n=1}^\infty$ taki, że $\forall n \in \mathbb{N}\ x{\restriction}I_{l_n}^3 \in J_{l_n}^3$. Dla każdego l_n można ustalić k_n takie, że $I_{l_n}^3 \subseteq I_{k_n}^2$. Skoro wszystkie rozszerzenia ciągu $x{\restriction}I_{l_n}^3$ do $2^{I_{k_n}^2}$ należą do $J_{k_n}^2$, to w szczególności ciąg $x{\restriction}I_{k_n}^2$ też. Ciąg k_n może zawierać powtórzenia, ale skoro zbiory w rodzinach $(I_l^3)_{l=1}^\infty$ oraz $(I_k^2)_{k=1}^\infty$ są skończone, ciąg k_n wciąż będzie zawierać nieskończenie wiele różnych elementów. Wobec tego $x \in (I_k^2, J_k^2)_{k=1}^\infty$.

Przypuśćmy, że $x \in (I_n^1, J_n^1)_{n=1}^\infty$. Z definicji istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$ takich, że $x{\restriction}I_n^1 \in J_n^1$. Z Lematu 3.5 mamy, że dla prawie wszystkich n istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $I_n^1 \cap I_k^2 \neq \emptyset$ oraz wszystkie rozszerzenia ciągu $x{\restriction}I_k^2$ są w J_k^2. Z tego wynika, że dla l takiego, że $I_l^3 = I_n^1 \cap I_k^2$ mamy $x{\restriction}I_l^3 \in J_l^3$. Takich l jest nieskończenie wiele z argumentu jak w poprzednim akapicie, więc $x \in (I_l^3, J_l^3)_{l=1}^\infty$. △

Następne twierdzenie pokaże w jaki sposób można przybliżać zbiory miary zero za pomocą zbiorów małych. Użyjemy w tym celu szczególnego rodzaju zbiorów małych, w których zbiór ω jest podzielony na przedziały.

Przedziałem nazywamy tutaj zbiór liczb naturalnych $[a, b) = \{x \in \omega : a \leqslant x < b\}$ dla ustalonych liczb $a, b \in \omega$.

Twierdzenie 3.7. *Przyjmijmy, że zbiór $G \subseteq 2^\omega$ jest miary zero. Istnieją wtedy ciągi liczb naturalnych $\langle n_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ i $\langle m_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ oraz rodziny $\{J_k^1 : k \in \mathbb{N}\}$, $\{J_k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ spełniających warunki:*

- $n_0 = 0$,
- $n_k < m_k < n_{k+1}$ *dla wszystkich* $k \in \mathbb{N}$,

- $J_k^1 \subseteq 2^{[n_k,n_{k+1})}$, $J_k^2 \subseteq 2^{[m_k,m_{k+1})}$ *dla* $k \in \mathbb{N}$
- *zbiory* $([n_k,n_{k+1}), J_k^1)_{k=1}^{\infty}$ *oraz* $([m_k,m_{k+1}), J_k^2)_{k=1}^{\infty}$ *są małe* [1], *oraz*
- $G \subseteq ([n_k,n_{k+1}), J_k^1)_{k=1}^{\infty} \cup ([m_k,m_{k+1}), J_k^2)_{k=1}^{\infty}$.

W szczególności każdy zbiór miary zero jest sumą dwóch zbiorów małych.

Dowód. Ustalmy zbiór miary zero $G \subseteq 2^{\omega}$. Z Lematu 3.1 istnieje ciąg $\langle F_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ taki, że $G \subseteq \{x \in 2^{\omega} : \exists^{\infty} n\ x{\restriction}n \in F_n\}$. Będziemy konstruować oba zbiory małe w taki sposób, aby elementy rodzin $(J_n^1)_{n=1}^{\infty}$ i $(J_n^2)_{n=1}^{\infty}$ były zbiorami składającymi się z obcięć ciągów należących do elementów ciągu $\langle F_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. Podział na przedziały będzie określony tak, żeby spełniony był warunek 3. z definicji zbioru małego (3.2). Zdefiniujmy ciągi $\langle n_k : k \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle m_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ następująco: $n_0 = 0$,

$$m_k = \min\left\{ j > n_k : 2^{n_k} \cdot \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|F_i|}{2^i} < \frac{1}{2^k} \right\}$$

oraz

$$n_{k+1} = \min\left\{ j > m_k : 2^{m_k} \cdot \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|F_i|}{2^i} < \frac{1}{2^k} \right\} \text{ dla } k \in \mathbb{N}.$$

W obu przypadkach zbiory, z których bierzemy minimum są niepuste, ponieważ szereg $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|F_i|}{2^i}$ jest zbieżny z własności ciągu $\langle F_n : n \in \mathbb{N}\rangle$.
Niech $I_k^1 = [n_k, n_{k+1})$ i $I_k^2 = [m_k, m_{k+1})$ dla $k \in \omega$. Zdefiniujmy rodziny J_k^1 i J_k^2 warunkami

$$s \in J_k^1 \iff s \in 2^{I_k^1} \wedge \exists i \in [m_k, n_{k+1})\ \exists t \in F_i\ s{\restriction}[n_k, i) = t{\restriction}[n_k, i)$$

oraz

$$s \in J_k^2 \iff s \in 2^{I_k^2} \wedge \exists i \in [n_{k+1}, m_{k+1})\ \exists t \in F_i\ s{\restriction}[m_k, i) = t{\restriction}[m_k, i).$$

Pozostaje pokazać, że $(I_k^1, J_k^1)_{k=1}^{\infty}$ oraz $(I_k^2, J_k^2)_{k=1}^{\infty}$ są zbiorami małymi i ich suma zawiera G.

Rozważmy zbiór $(I_k^1, J_k^1)_{k=1}^{\infty}$. Zauważmy, że dla $k \in \omega$

$$\frac{|J_k^1|}{2^{|I_k^1|}} \leqslant \frac{1}{2^{n_{k+1}-n_k}} \sum_{i=m_k}^{n_{k+1}} |F_i| \cdot 2^{n_{k+1}-i} = 2^{n_k} \cdot \sum_{i=m_k}^{n_{k+1}} \frac{|F_i|}{2^i} < \frac{1}{2^k}.$$

Skoro $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$, to $(I_n^1, J_n^1)_{n=1}^{\infty}$ jest zbiorem małym. Analogiczny argument pokazuje, że zbiór $(I_n^2, J_n^2)_{n=1}^{\infty}$ jest mały. W końcu pokażmy, że

$$G \subseteq (I_n^1, J_n^1)_{n=1}^{\infty} \cup (I_n^2, J_n^2)_{n=1}^{\infty}.$$

Przyjmijmy, że $x \in G$ oraz ustalmy $Z = \{n \in \omega : x{\restriction}n \in F_n\}$. Ze sposobu wyboru ciągu $\langle F_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ wynika, że zbiór Z jest nieskończony. W takim razie jeden ze zbiorów

$$Z \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} [m_k, n_{k+1}) \text{ lub } Z \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} [n_{k+1}, m_{k+1})$$

[1] Formalnie rodzina $\{[m_k, m_{k+1}) : k \in \mathbb{N}\}$ nie jest podziałem ω ze względu na brak pewnego początkowego przedziału, ale nie jest to istotny problem. Por. [3].

jest nieskończony. Bez straty ogólności można przyjąć, że jest to pierwszy z nich. W takim razie $x \in (I^1_n, J^1_n)^\infty_{n=1}$, ponieważ jeśli $x{\restriction}n \in F_n$ oraz $n \in [m_k, n_{k+1})$, więc z definicji zbioru J^1_k istnieje $t \in J^1_k$ taki, że $x{\restriction}[n_k, n_{k+1}) = t$. $\triangle$

Powyższe twierdzenie pokazuje, że zbiory małe są dobrym przybliżeniem zbiorów miary zero. W dalszej części pracy rozważane podziały zbioru ω będą zawsze podziałami na przedziały.

Będziemy używali powyższego twierdzenia także dla rodzin zbiorów miary zero. Jeśli taka rodzina nie jest zbyt duża, można znaleźć takie dwa podziały, że używając jedynie ich można rozłożyć wszystkie zbiory z tej rodziny na zbiory małe.

Twierdzenie 3.8. *Przypuśćmy, że $\{G_\alpha : \alpha < \kappa < \mathfrak{b}\}$ jest rodziną zbiorów miary zero. Istnieją wtedy dwa ciągi liczb naturalnych $\langle n_k : k \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle m_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ oraz rodziny $\{J^\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$, $\{\bar{J}^\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}$ dla $\alpha < \kappa$ spełniające warunki:*

- $n_0 = 0$,
- $n_k < m_k < n_{k+1}$ *dla wszystkich* $k \in \mathbb{N}$,
- $J^\alpha_k \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})}$, $\bar{J}^\alpha_k \subseteq 2^{[m_k, m_{k+1})}$ *dla* $\alpha < \kappa, k \in \mathbb{N}$
- $\frac{|J^\alpha_k|}{2^{n_{k+1}-n_k}} < \frac{1}{2^{2k}}$, $\frac{|\bar{J}^\alpha_k|}{2^{m_{k+1}-m_k}} < \frac{1}{2^{2k}}$ *dla wszystkich $\alpha < \kappa$ i prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$ oraz*
- $G_\alpha \subseteq ([n_k, n_{k+1}), J^\alpha_k)^\infty_{k=1} \cup ([m_k, m_{k+1}), \bar{J}^\alpha_k)^\infty_{k=1}$ *dla* $\alpha < \kappa$.

Dowód. Zastosujmy Lemat 3.1 do każdego ze zbiorów G_α dla $\alpha < \kappa$. Otrzymujemy w ten sposób rodzinę ciągów $\{\langle F^\alpha_n : n \in \mathbb{N}\rangle : \alpha < \kappa\}$ taką, że

$$G_\alpha \subseteq \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n\ x{\restriction}n \in F^\alpha_n\} \text{ dla } \alpha < \kappa.$$

Dla $\alpha < \kappa, k \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy funkcję rosnącą $f^\alpha \in \omega^\omega$ następująco:

$$f^\alpha(k) = \min\Big\{j \in \mathbb{N} : \sum_{i=j}^{\infty} \frac{|F^\alpha_i|}{2^i} < \frac{1}{2^k}\Big\}.$$

Funkcje te są dobrze zdefiniowane, ponieważ dla każdego $\alpha < \kappa$ szereg $\sum_{i=1}^\infty \frac{|F^\alpha_i|}{2^i}$ jest zbieżny.

Liczba kardynalna $\mathfrak{b}$ jest mocą najmniejszej rodziny, dla której nie można znaleźć funkcji prawie wszędzie większej lub równej od wszystkich elementów tej rodziny. W takim razie skoro $\kappa < \mathfrak{b}$, to dla rodziny funkcji $\{f^\alpha : \alpha < \kappa\}$ możemy znaleźć funkcję rosnącą $\Gamma \in \omega^\omega$ taką, że $f^\alpha \leqslant^* \Gamma$ dla $\alpha < \kappa$.

Zdefiniujmy funkcję rosnącą $r \in \omega^\omega$ następująco: $r(0) = 0$,

$$r(k+1) = \Gamma(2k + r(k)),$$

dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Chcemy, żeby funkcja r posiadała następującą własność, potrzebną nam do dalszej części dowodu:

$$\forall \alpha < \kappa\ \forall^\infty k \in \mathbb{N}\ 2^{r(k)} \cdot \sum_{i=r(k+1)}^{\infty} \frac{|F^\alpha_i|}{2^i} < \frac{1}{2^{2k}}. \tag{*}$$

Niech $A_k = \{\alpha < \kappa : \forall l \geqslant k \ f^\alpha(l) \leqslant \Gamma(l)\}$. Z definicji funkcji Γ wiemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla każdego $\alpha \in A_k$ spełniony jest warunek

$$\sum_{i=\Gamma(k)}^{\infty} \frac{|F_i^\alpha|}{2^i} < \frac{1}{2^k}.$$

W takim razie dla ustalonego $\alpha < \kappa$ określmy liczbę $l_\alpha \in \mathbb{N}$ wzorem $l_\alpha = \min\{n \in \mathbb{N} : \alpha \in \ A_{2n+r(n)}\}$. Skoro spełniony jest warunek $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \kappa$, a funkcja r jest rosnąca, to l_α jest dobrze zdefiniowane. Dla $l \geqslant l_\alpha$ mamy:

$$\sum_{i=r(l+1)}^{\infty} \frac{|F_i^\alpha|}{2^i} < \frac{1}{2^{2l+r(l)}},$$

ponieważ $r(l+1) = \Gamma(2l + r(l))$. Pokazuje to, że funkcja r posiada własność (*).

Mając zdefiniowaną funkcję r ustalmy ciągi liczb naturalnych $n_k = r(2k)$ i $m_k = r(2k+1)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Podobnie jak w Twierdzeniu 3.7, dla $\alpha < \kappa$ zdefiniujmy rodziny J_k^α i $\bar{J}_k^\alpha$ następująco:

$$s \in J_k^\alpha \iff s \in 2^{[n_k, n_{k+1})} \wedge \exists i \in [m_k, n_{k+1}) \ \exists t \in F_i^\alpha \ s{\restriction}[n_k, i) = t{\restriction}[n_k, i)$$

oraz

$$s \in \bar{J}_k^\alpha \iff s \in 2^{[m_k, m_{k+1})} \wedge \exists i \in [n_{k+1}, m_{k+1}) \ \exists t \in F_i^\alpha \ s{\restriction}[m_k, i) = t{\restriction}[m_k, i).$$

Reszta rozumowania jest analogiczna do drugiej części dowodu Twierdzenia 3.7 rozważając dla ustalonego α liczby $l \geqslant l_\alpha$ dla $l_\alpha = \min\{n \in \mathbb{N} : \alpha \in \ A_{2n+r(n)}\}$.

$\triangle$

Zbiory małe posiadają jeszcze jedną użyteczną reprezentację, której użyjemy do dowodu głównego twierdzenia tej pracy. Dla funkcji $H \in \omega^\omega$, oznaczmy

$$\mathcal{X}_H = \prod_{n=0}^{\infty} H(n).$$

Dla naszych potrzeb będziemy rozważać funkcje H spełniające warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H(n)} < \infty$. Ze względu na przeprowadzaną poniżej konstrukcję chcemy przyjąć, że funkcja H jest postaci $H(n) = 2^{\widetilde{H}(n)}$ dla pewnej funkcji $\widetilde{H} \in \omega^\omega$.

Zdefiniujmy dodatkowo ciąg sum częściowych funkcji $\widetilde{H}(n)$ jako $z_0 = 0$ i $z_{n+1} = z_n + \widetilde{H}(n)$. Będziemy też utożsamiać zbiór liczb naturalnych mniejszych niż $H(n)$ ze zbiorem ciągów zero-jedynkowymi długości $\widetilde{H}(n)$ (zbiory te są tej samej mocy, nie ma też wielkiego znaczenia w jaki sposób będą utożsamione).

Po przyjęciu tych założeń możemy wprowadzić następujące definicje:

Definicja 3.9. *Rozważmy funkcję $H \in \omega^\omega$. Zdefiniujmy*

$$\mathcal{C}_H = \Big\{S \in ([\omega]^{<\omega})^\omega : \forall n \in \mathbb{N} \ S(n) \subseteq H(n) \wedge \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|S(n)|}{H(n)} < \infty\Big\}.$$

Elementy tej rodziny będziemy nazywali slalomami.

Definicja 3.10. *Ustalmy slalom $S \in \mathcal{C}_H$. Wtedy określmy zbiór*

$$G_S = \{x \in 2^\omega : \exists^\infty n\ x\restriction[z_n, z_{n+1}) \in S(n)\}.$$

Fakt 3.11. *Zbiór G_S jest miary zero.*

Dowód. Mamy

$$\mu(G_S) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \mu(\{x \in 2^\omega : x\restriction[z_n, z_{n+1}) \in S(n)\}) \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} \frac{|S(n)|}{H(n)} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

△

W drugą stronę ustalmy dla elementu $x \in 2^\omega$ funkcję $h_x(n) = x\restriction[z_n, z_{n+1})$ dla $n \in \omega$. Traktując wartości tej funkcji jako liczby naturalne, jest to element $\mathcal{X}_H$.

Mamy także

$$x \in G_S \iff \exists^\infty n\ h_x(n) \in S(n).$$

W tym momencie przejdziemy do najważniejszego twierdzenia tej pracy, będącego kombinatoryczną charakteryzacją współczynnika pokryciowego przy założeniu, że nie jest on zbyt duży.

Twierdzenie 3.12. *Przypuśćmy, że* $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) < \mathfrak{b}$. *Istnieje funkcja $H \in \omega^\omega$ taka, że współczynnik* $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$ *jest równy mocy najmniejszej rodziny $\widetilde{S} \subseteq \mathcal{C}_H$ spełniającej warunek*

$$\forall h \in \mathcal{X}_H\ \exists S \in \widetilde{S}\ \exists^\infty n\ h(n) \in S(n). \tag{*}$$

Dowód. Pokażmy najpierw nierówność $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leqslant |\widetilde{S}|$.

Niech rodzina funkcji $\widetilde{S} \subseteq \mathcal{C}_H$ spełnia warunek (*). Rozważmy rodzinę zbiorów $\{G_S : S \in \widetilde{S}\}$. Z Faktu 3.11 wynika, że zbiory z tej rodziny są miary zero. Ustalmy dowolny $x \in 2^\omega$. Odpowiada mu funkcja $h_x \in \mathcal{X}_H$, więc korzystając z warunku (*) istnieje funkcja $S_x \in \widetilde{S}$ taka, że $\exists^\infty n\ h_x(n) \in S_x(n)$. W takim razie $x \in G_{S_x}$, czyli $\bigcup_{s\in\widetilde{S}} G_S = 2^\omega$, co pokazuje dowodzoną nierówność.

Pozostaje pokazać, że dla pewnej funkcji H zachodzi nierówność $|\widetilde{S}| \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{N})$.

Przypuśćmy, że $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) = \kappa < \mathfrak{b}$ oraz niech rodzina zbiorów miary zero $\{G_\alpha : \alpha < \kappa\}$ pokrywa 2^ω.

Z Twierdzenia 3.8 wynika, że istnieją dwa ciągi liczb naturalnych $\langle n_k : k \in \mathbb{N}\rangle$, $\langle m_k : k \in \mathbb{N}\rangle$ oraz rodziny $\{J_k^\alpha : k \in \mathbb{N}\}$, $\{\bar{J}_k^\alpha : k \in \mathbb{N}\}$ dla $\alpha < \kappa$ spełniające warunki:

- $n_0 = 0$,
- $n_k < m_k < n_{k+1} < m_{k+1}$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$,
- $J_k^\alpha \subseteq 2^{[n_k, n_{k+1})}$, $\bar{J}_k^\alpha \subseteq 2^{[m_k, m_{k+1})}$ dla $\alpha < \kappa, k \in \mathbb{N}$
- $\frac{|J_k^\alpha|}{2^{n_{k+1}-n_k}} < \frac{1}{2^{2k}}$, $\frac{|\bar{J}_k^\alpha|}{2^{m_{k+1}-m_k}} < \frac{1}{2^{2k}}$ dla dla wszystkich $\alpha < \kappa$ i prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$ oraz
- $G_\alpha \subseteq ([n_k, n_{k+1}), , J_k^\alpha)_{k=1}^\infty \cup ([m_k, m_{k+1}), \bar{J}_k^\alpha)_{k=1}^\infty$ dla $\alpha < \kappa$.

W takim razie

$$2^\omega = \bigcup_{\alpha<\kappa} ([n_k, n_{k+1}), J_k^\alpha)_{k=1}^\infty \cup ([m_k, m_{k+1}), \bar{J}_k^\alpha)_{k=1}^\infty. \qquad (\dagger)$$

Jeśli $2^\omega = \bigcup_{\alpha<\kappa}([n_k, n_{k+1}), J_k^\alpha)_{k=1}^\infty$, to określając funkcję $\widetilde{H} \in \omega^\omega$ wzorem $\widetilde{H}(k) = n_{k+1} - n_k$ dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy rodzinę slalomów $\widetilde{S} = \{J^\alpha : \alpha < \kappa\}$ (traktując ciąg J_k^α jako funkcję $k \mapsto J_k^\alpha$ i oznaczając ją J^α). Dla tak określonej funkcji H można zauważyć, że dowolna funkcja $h \in \mathcal{X}_H$ wyznacza element $x \in 2^\omega$ taki, że $h = h_x$. Element x jest pokrywany przez pewien zbiór mały $([n_k, n_{k+1}), J_k^\alpha)_{k=1}^\infty$ i dla odpowiadającej mu rodziny J^α spełniony jest warunek $\exists^\infty n \in \mathbb{N}\; h(n) \subseteq J^\alpha(n)$. Rodzina J^α jest mocy $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$, więc w tej sytuacji spełniona jest nierówność $|\widetilde{S}| \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{N})$.

Gdy zachodzi $2^\omega = \bigcup_{\alpha<\kappa}([m_k, m_{k+1}), \bar{J}_k^\alpha)_{k=1}^\infty$, to sytuacja jest symetryczna i analogiczny argument również działa.

W takim razie przyjmijmy, że żadna z tych rodzin zbiorów małych nie pokrywa 2^ω.

Dla $\alpha < \kappa, k \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy rodziny ciągów

$$S_k^\alpha = \left\{s \in 2^{[n_k, m_k)} : s \text{ posiada przynajmniej } \frac{1}{2^k} \cdot 2^{n_{k+1} - m_k} \text{ rozszerzeń wewnątrz } J_k^\alpha\right\}.$$

Zauważmy, że dla $\alpha < \kappa, k \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$|S_k^\alpha| \cdot \frac{1}{2^k} \cdot 2^{n_{k+1} - m_k} \leqslant |J_k^\alpha|.$$

W takim razie mamy

$$\frac{|S_k^\alpha|}{2^{m_k}} \leqslant 2^k \cdot \frac{|J_k^\alpha|}{2^{n_{k+1}}}$$

oraz

$$\frac{|S_k^\alpha|}{2^{m_k - n_k}} \leqslant 2^k \cdot \frac{|J_k^\alpha|}{2^{n_{k+1} - n_k}} \leqslant 2^k \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k},$$

dla każdego $\alpha < \kappa$ i prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Podobnie zdefiniujmy

$$\bar{S}_k^\alpha = \left\{s \in 2^{[n_k, m_k)} : s \text{ posiada przynajmniej } \frac{1}{2^{k-1}} \cdot 2^{n_k - m_{k-1}} \text{ rozszerzeń wewnątrz } \bar{J}_{k-1}^\alpha\right\}.$$

Argumentując analogicznie jak poprzednio otrzymujemy

$$\frac{|\bar{S}_k^\alpha|}{2^{m_k - n_k}} \leqslant 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{2(k-1)}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

dla wszystkich $\alpha < \kappa$ i prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$.

Skonstruujmy rodzinę zbiorów małych $R = \{([n_k, n_{k+1}), R_k^\alpha)_{k=1}^\infty : \alpha < \kappa\}$ następująco: dla $\alpha < \kappa$, $k \in \mathbb{N}$ niech

$$s \in R_k^\alpha \iff s{\restriction}[n_k, m_k) \in S_k^\alpha \cup \bar{S}_k^\alpha.$$

Zbiory z rodziny R są małe, ponieważ

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{|R_k^\alpha|}{2^{n_{k+1} - n_k}} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{2^{n_{k+1} - m_k} \cdot |S_k^\alpha \cup \bar{S}_k^\alpha|}{2^{n_{k+1} - n_k}} \leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{|S_k^\alpha \cup \bar{S}_k^\alpha|}{2^{m_k - n_k}} < \infty.$$

Podobnie jak poprzednio, rodzina R będzie odpowiadała rodzinie $\widetilde{R} \subseteq \mathcal{C}_H$ przyjmując funkcję $\widetilde{H}(k) = n_{k+1} - n_k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Jeśli rodzina $\widetilde{R}$ pokrywa zbiór 2^ω, wtedy używając podobnej argumentacji jak poprzednio można pokazać nierówność $|\widetilde{R}| \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{N})$.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy istnieje $x \in 2^\omega \setminus \bigcup R$.

Zdefiniujmy rodzinę zbiorów małych $T = \{([m_k, m_{k+1}), T_k^\alpha)_{k=1}^\infty : \alpha < \kappa\}$ następująco: dla $\alpha < \kappa$ oraz $k \in \mathbb{N}$,

$$s \in T_k^\alpha \iff x{\restriction}[n_k, m_k)^\frown s{\restriction}[m_k, n_{k+1}) \in J_k^\alpha \vee s{\restriction}[m_k, n_{k+1})^\frown x{\restriction}[n_{k+1}, m_{k+1}) \in \bar{J}_k^\alpha.$$

Skoro element x nie należy do żadnego zbioru z rodziny R, to dla prawie wszystkich liczb $k \in \mathbb{N}$ mamy $x \restriction [n_k, m_k) \notin S_k^\alpha \cup \bar{S}_k^\alpha$. Wynika z tego, że dla prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$ ciągi $x \restriction [n_k, m_k)$ i $x \restriction [n_{k+1}, m_{k+1})$ mają mniej niż $\frac{1}{2^k} \cdot 2^{n_{k+1}-m_k}$ rozszerzeń wewnątrz rodzin J_k^α i $\bar{J}_k^\alpha$ odpowiednio. Każdemu takiemu rozszerzeniu odpowiada jeden ciąg $s{\restriction}[m_k, n_{k+1})$ dla pewnego $s \in T_k^\alpha$. W takim razie zachodzą nierówności

$$\frac{|T_k^\alpha|}{2^{m_{k+1}-m_k}} \leqslant 2 \cdot \frac{2^{m_{k+1}-n_{k+1}} \cdot 2^{n_{k+1}-m_k-k}}{2^{m_{k+1}-m_k}} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}$$

dla wszystkich $\alpha < \kappa$ i dla prawie wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Pokazuje to, że zbiory z rodziny T są małe.

Podobnie jak w poprzednich przypadkach, jeśli $2^\omega = \bigcup T$, to definiując funkcję $\widetilde{H}(n) = m_{k+1} - m_k$ i rodzinę slalomów $\widetilde{T} \subseteq \mathcal{C}_H$ jako T, otrzymujemy nierówność $|\widetilde{T}| \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{N})$.

Przypuśćmy w takim razie, że istnieje $y \notin \bigcup T$.

Ustalmy wtedy $z \in 2^\omega$ jako

$$z = x{\restriction}[n_0, m_0)^\frown y{\restriction}[m_0, n_1)^\frown x{\restriction}[n_1, m_1)^\frown y{\restriction}[m_1, n_2)^\frown \ldots$$

i pokażemy, że

$$z \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} ([n_k, n_{k+1}), J_k^\alpha)_{k=1}^\infty \cup \bigcup_{\alpha<\kappa} ([m_k, m_{k+1}), \bar{J}_k^\alpha)_{k=1}^\infty,$$

co będzie sprzecznością z †.

Przypuśćmy bez straty ogólności, że $z \in ([n_k, n_{k+1}), J_k^\alpha)_{k=1}^\infty$ dla pewnego $\alpha < \kappa$. W takim razie dla nieskończenie wielu $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $x{\restriction}[n_k, n_{k+1}) \in J_k^\alpha$. Należy rozważyć dwa przypadki:

1. Istnieje nieskończenie wiele liczb $k \in \mathbb{N}$ takich, że $z{\restriction}[n_k, m_k)$ posiada przynajmniej $\frac{1}{2^k} \cdot 2^{n_{k+1}-m_k}$ rozszerzeń wewnątrz J_k^α.

   Zauważmy, że $z{\restriction}[n_k, m_k) = x{\restriction}[n_k, m_k)$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. W takim razie $x \in ([n_k, m_k), S_k^\alpha)_{k=1}^\infty \subseteq ([n_k, n_{k+1}), R_k^\alpha)_{k=1}^\infty$, co daje sprzeczność.

2. Dla prawie wszystkich liczb $k \in \mathbb{N}$ ciąg $z \restriction [n_k, m_k)$ posiada mniej niż $\frac{1}{2^k} \cdot 2^{n_{k+1}-m_k}$ rozszerzeń wewnątrz J_k^α.

   Skoro $z \restriction [m_k, n_{k+1}) = y \restriction [m_k, n_{k+1})$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, to mamy $y \in ([m_k, m_{k+1}), T_k^\alpha)_{k=1}^\infty$ z definicji zbioru $([m_k, m_{k+1}), T_k^\alpha)_{k=1}^\infty$. Jest to sprzeczność z założeniami.

$\triangle$

4 Bibliografia

Literatura

[1] Tomek Bartoszyński, *On covering of real line by null sets*, Pacific J. Math. 131 (1988), no. 1, 1–12.

[2] Tomek Bartoszyński, Haim Judah, *Set Theory, On the Structure of the Real Line*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995.

[3] Tomek Bartoszyński, Saharon Shelah, *A note on small sets of reals*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 356(2018), no. 11-12, 1053-1061.

[4] Patrick Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara*, PWN, Warszawa, 1987