

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: matematyka teoretyczna

Andrzej Karolak

Regularne drzewa grafów jako kompakty Markowa

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dra hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2022

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Podstawowe pojęcia	3
2.1	Konstruktywny kompakt Markowa	3
2.2	Regularne drzewo grafów	6
3	Konstruktywny kompakt Markowa odpowiadający regularnemu drzewu grafów	12
3.1	Dobra rodzina sympleksów	13
3.2	Dobra rodzina reguł podmiany	14
3.3	Etykietowanie	18
3.4	Początek i koniec konstrukcji	19
3.5	Komentarz o konstrukcji	19
4	Dowód zasadniczego twierdzenia	22
4.1	Rodzina pomocniczych homeomorfizmów	23
4.2	Dowód Lematu 4.1	27

1 Wstęp

W tej pracy pokażemy, że rodzina przestrzeni topologicznych opisanych w [1] nazywanych *regularnymi drzewami grafów* zawiera się w rodzinie przestrzeni nazywanych (*konstruktywnymi*) *kompaktami Markowa*. Konkretnie, korzystając z danych definiujących regularne drzewo grafów, skonstruujemy zestaw danych, definiujący konstruktywny kompakt Markowa, tak jak jest to opisane w pracy [2]. Udowodnimy, że granica odwrotna powstałego w tej konstrukcji ciągu odwrotnego jest homeomorficzna z granicą tak zwanego *systemu drzewiastego* związanego z regularnym drzewem grafów. Wynik ten w pewnym stopniu uzasadnia sens badania regularnych drzew grafów jako kandydatów na brzegi Gromowa grup hiperbolicznych, które okazują się być kompaktami Markowa, co pokazano w pracy [3]. W oczywisty sposób daje też alternatywną konstrukcję regularnego drzewa grafów.

2 Podstawowe pojęcia

Dla wygody czytelnika przytoczymy w skrótowny i nie w pełni ogólny sposób definicje pojęć i konstrukcji, z których będziemy korzystać. Może jednak okazać się niezbędne równoległe czytanie prac [1] i [2], w których te pojęcia są wprowadzane.

2.1 Konstruktywny kompakt Markowa

W tym podrozdziale opieramy się na pracy [2]. Konstruktywny kompakt Markowa opisany jest za pomocą następującego zestawu pojęć:

- Zestaw montażowy (assembly system)
- Reguły podmiany (rules of replacement)
- Etykietowanie (labelling)

Notacja 2.1. Kompleks symplecjalny możemy rozważać kombinatorycznie jako rodzinę podzbiorów pewnego zbioru lub jako przestrzeń topologiczną. Dla sympleksu σ pisząc $\sigma \in K$ rozumiemy go jako element rodziny K , a pisząc $\sigma \subset K$ jako podprzestrzeń topologiczną.

Definicja 2.2 (Zestaw montażowy).

Niech X będzie kompleksem symplecjalnym. Zakładamy, że

- Z każdym sympleksem $\sigma \in X$ stowarzyszony jest skończony kompleks symplecjalny Y_σ (przyjmujemy $Y_\emptyset = \emptyset$).
- Z każdą parą sympleksów $\rho, \tau \in X$ taką, że $\rho \subset \tau$ stowarzyszone jest odwzorowanie $i_{\rho\tau} : Y_\rho \rightarrow Y_\tau$, spełniające następujące warunki:
 - i) $i_{\rho\tau}$ jest symplecjalnym włożeniem (przyjmujemy $i_{\rho\rho} = \text{id}_{Y_\rho}$),
 - ii) dla każdego $\rho \subset \tau \subset \nu$ zachodzi $i_{\rho\nu} = i_{\tau\nu} \circ i_{\rho\tau}$,
 - iii) dla każdego $\rho_1, \rho_2 \subset \tau$ zachodzi $i_{\rho_1\tau}(Y_{\rho_1}) \cap i_{\rho_2\tau}(Y_{\rho_2}) = i_{(\rho_1 \cap \rho_2)\tau}(Y_{\rho_1 \cap \rho_2})$.

Wtedy układ $\mathcal{A} = (\{Y_\sigma\}_{\sigma \in X}, \{i_{\rho\tau}\}_{\rho \subset \tau})$ nazwyamy (*symplecjalnym*) *zestawem montażowym nad X* . Z zestawem montażowym \mathcal{A} w naturalny sposób stowarzyszymy przestrzeń ilorazową

$$Y = \bigsqcup_{\sigma \in X} Y_\sigma / \sim$$

gdzie relacja równoważności \sim jest indukowana przez odwzorowania $i_{\rho\tau}$, czyli jest symetrycznym domknięciem relacji \sim' zadanej przez:

$$p \sim' q \iff \exists \rho, \tau \in X \quad q = i_{\rho\tau}(p)$$

Tę przestrzeń nazywamy \mathcal{A} – ilorazem.

Uwaga 2.3.

1. \mathcal{A} –iloraz Y posiada naturalną strukturę kompleksu symplecjajalnego.
2. Każda z przestrzeni Y_σ wkłada się w \mathcal{A} –iloraz poprzez odwzorowanie symplecjajalne, które jest złożeniem $\pi \circ \iota$, gdzie $\pi : \bigsqcup_{\sigma \in X} Y_\sigma \rightarrow Y$ jest odwzorowaniem ilorazowym, a $\iota : Y_\sigma \hookrightarrow \bigsqcup_{\sigma \in X} Y_\sigma$ włożeniem.

Definicja 2.4 (Odwzorowanie semi-barycentryczne).

Niech X i Y będą kompleksami symplecjajalnymi. Odwzorowanie $f : X \rightarrow Y$ jest *semi-barycentryczne*, gdy spełnia następujące warunki:

- i) dla każdego sympleksu $\sigma \subset X$ istnieje sympleks $\tau \subset Y$ taki, że $f(\sigma) \subset \tau$ i $f \upharpoonright_\sigma$ jest odwzorowaniem afinicznym,
- ii) wierzchołki X są odwzorowywane w wierzchołki Y' – pierwszego podrozbicia barycentrycznego Y ,
- iii) dla każdego sympleksu $\sigma \subset X$ istnieje wierzchołek $v \in Y$ taki, że $f(\sigma) \subset \text{st}(v, Y')$, gdzie $\text{st}(v, Y') = \bigcup_{v \in \sigma \subset Y'} \sigma$.

Definicja 2.5 (Dobra rodzina sympleksów).

Dobra rodzina sympleksów to para $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$, gdzie

- Σ jest zbiorem sympleksów;
- B jest zbiorem wszystkich właściwych ścian we wszystkich sympleksach $\sigma \in \Sigma$;
- Dla każdego $\sigma \in \Sigma$ i każdej właściwej ściany $\beta \subset \sigma$ istnieje $\sigma_\beta \in \Sigma$ i symplecjajalne włożenie $z_\beta : \sigma_\beta \rightarrow \sigma$ takie, że $z_\beta(\sigma_\beta) = \beta$.

Zakładamy, że dla każdego $\beta \in B$ odwzorowanie z_β jest jedyne oraz, że rodzina $\{z_\beta\}_{\beta \in B}$ jest zamknięta na złożenia.

Definicja 2.6 (Reguły podmiany).

Niech $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$ będzie dobrą rodziną sympleksów. *Reguła podmiany* dla $\sigma \in \Sigma$ to para (P_σ, π_σ) , gdzie

- P_σ jest skończonym kompleksem symplecjajalnym;
- $\pi_\sigma : P_\sigma \rightarrow \sigma$ jest odwzorowaniem semi-barycentrycznym.

Dobra rodzina reguł podmiany dla \mathcal{D} to para $\mathcal{R} = (\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}, \{P_{z_\beta} : \beta \in B\})$, gdzie

- $\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}$ jest rodziną reguł podmiany;
- $\{P_{z_\beta} : \beta \in B\}$ jest rodziną odwzorowań ”łączących”, które spełniają następujące warunki

- i) dla każdego $\sigma \in \Sigma$ i właściwej ściany $\beta \subset \sigma$ wyposażonych w odwzorowanie $z_\beta : \sigma_\beta \rightarrow \sigma$ odwzorowanie $P_{z_\beta} : P_{\sigma_\beta} \rightarrow P_\sigma$ jest symplecjajnym włożeniem,
- ii) dla każdego $\sigma \in \Sigma$ i właściwej ściany $\beta \subset \sigma$ zachodzą równości

$$\pi_\sigma \circ P_{z_\beta} = z_\beta \circ \pi_{\sigma_\beta} \text{ oraz } \pi_\sigma^{-1}(\beta) = P_{z_\beta}(P_{\sigma_\beta}),$$

- iii) Dla właściwych ścian $\beta \subset \sigma$ i $\alpha \subset \sigma_\beta$ zachodzi równość

$$P_{z_\beta} \circ P_{z_\alpha} = P_{z_{z_\beta(\alpha)}}.$$

Definicja 2.7 (Etykietowanie).

Niech $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$ będzie dobrą rodziną sympleksów. \mathcal{D} -etykietowanie kompleksu symplecjajnego X to para $\Lambda = (\lambda, \{u_\sigma : \sigma \in X\})$, gdzie

- $\lambda : X \rightarrow \Sigma$ jest odwzorowaniem pomiędzy zbiorami sympleksów takim, że dla każdego $\sigma \in X$ zachodzi równość $\dim \sigma = \dim \lambda(\sigma)$;
- Dla każdego $\sigma \in X$ odwzorowanie $u_\sigma : \sigma \rightarrow \lambda(\sigma)$ jest izomorfizmem sympleksów. Ponadto zakładamy, że dla $\rho \subset \tau$ zachodzi równość $\lambda(\rho) = \lambda(\tau)_{u_\tau(\rho)}$ (symbol $\lambda(\tau)_{u_\tau(\rho)}$ rozumiemy jak σ_β z definicji dobrej rodziny sympleksów) i poniższy diagram komutuje.

$$\begin{array}{ccc} \rho & \xrightarrow{\quad} & \tau \\ u_\rho \downarrow & & \downarrow u_\tau \\ \lambda(\rho) & \xrightarrow{z_{u_\tau(\rho)}} & \lambda(\tau) \end{array}$$

Niech $\mathcal{D}_1 = (\Sigma_1, \{z_\beta^1 : \beta \in B_1\})$ i $\mathcal{D}_2 = (\Sigma_2, \{z_\beta^2 : \beta \in B_2\})$ będą dobrymi rodzinami sympleksów i niech $\mathcal{R} = (\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma_1\}, \{P_{z_\beta} : \beta \in B\})$ będzie dobrą rodziną reguł podmiany dla \mathcal{D}_1 . \mathcal{D}_2 -etykietowanie rodziny \mathcal{R} to \mathcal{D}_2 -etykietowanie $\Lambda_{\mathcal{R}} = (\lambda_{\mathcal{R}}, \{u_\tau^{\mathcal{R}} : \tau \in X\})$ kompleksu $X = \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma_1} P_\sigma$ takie, że dla dowolnego $\sigma \in \Sigma_1$ i właściwej ściany $\beta \subset \sigma$ oraz dla dowolnych sympleksów $\rho \in P_{\sigma_\beta}$ i $\tau \in P_\sigma$ takich, że $P_{z_\beta}(\rho) = \tau$ zachodzi równość $u_\rho^{\mathcal{R}} = u_\tau^{\mathcal{R}} \circ P_{z_\beta}$, czyli w szczególności $\lambda_{\mathcal{R}}(\rho) = \lambda_{\mathcal{R}}(\tau)$. Będziemy korzystać z przypadku, gdzie $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.

Przeprowadzimy teraz konstrukcję ciągu odwrotnego

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_i} X_i \xleftarrow{f_{i+1}} X_{i+1} \xleftarrow{f_{i+2}} \dots$$

gdzie X_j są kompleksami symplecjajnymi, a f_j odwzorowaniami semi-barycentrycznymi dla $j = 0, 1, \dots$, korzystając z następującego zestawu danych:

- kompleksu symplecjajnego X_0 ;
- dobrej rodziny sympleksów $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$;
- dobrej rodziny reguł podmiany $\mathcal{R} = (\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}, \{P_{z_\beta} : \beta \in B\})$ dla \mathcal{D} ;
- \mathcal{D} -etykietowania $\Lambda = (\lambda, \{u_\sigma : \sigma \in X_0\})$ kompleksu X_0 ;
- \mathcal{D} -etykietowania $\Lambda_{\mathcal{R}} = (\lambda_{\mathcal{R}}, \{u_\tau^{\mathcal{R}} : \tau \in \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma\})$ rodziny \mathcal{R} .

Kompleksy X_j i odwzorowania f_j definiować będziemy rekurencyjnie.

Krok 1. Niech X_1 będzie \mathcal{A}_1 -ilorazem zestawu montażowego $\mathcal{A}_1 = (\{Y_\sigma^1\}_{\sigma \in X_0}, \{i_{\rho\tau}^1\}_{\rho \subset \tau})$, gdzie

- $Y_\sigma^1 = P_{\lambda(\sigma)}$ dla $\sigma \in X_0$;
- $i_{\rho\tau}^1 = P_{z_{u_\tau(\rho)}}$ dla $\rho \subset \tau \in X_0$.

Niech $f_1 : X_1 \rightarrow X_0$ będzie odwzorowaniem indukowanym przez odwzorowania $f_\sigma : Y_\sigma^1 \rightarrow X_0$ zdefiniowane przez złożenie $f_\sigma = u_\sigma^{-1} \circ \pi_{\lambda(\sigma)}$. W szczególności poniższy diagram komutuje

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup P_{\lambda(\sigma)} & \xrightarrow{\pi} & X_1 \\ \bigsqcup f_\sigma \downarrow & & f_1 \downarrow \\ \bigsqcup \sigma & \xrightarrow{\pi_{X_0}} & X_0 \end{array}$$

gdzie sumy rozłączne wykonujemy po wszystkich sympleksach $\sigma \subset X_0$, π to odwzorowanie ilorazowe pochodzące od \mathcal{A}_1 -ilorazu, a π_{X_0} to naturalne odwzorowanie ilorazowe.

Uwaga 2.8. Etykietowanie $\Lambda_{\mathcal{R}}$ indukuje etykietowanie $\Lambda_1 = (\lambda_1, \{u_\sigma^1 : \sigma \in X_1\})$ na kompleksie X_1 . Rzeczywiście, niech $\pi : \bigsqcup_{\sigma \in X_0} P_{\lambda(\sigma)} \rightarrow X_1$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Niech $\sigma \subset X_1$. Z definicji $\Lambda_{\mathcal{R}}$ jeśli dla $\sigma_1, \sigma_2 \in \bigsqcup_{\sigma \in X_0} P_{\lambda(\sigma)}$ mamy $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2) = \sigma$, to mamy $\lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_1) = \lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_2)$, więc możemy zdefiniować $\lambda_1(\sigma) = \lambda_{\mathcal{R}}(\sigma_1)$ oraz u_σ^1 tak, by $u_\sigma^1 \circ \pi = u_{\sigma_1}^{\mathcal{R}}$.

Krok $j+1$ dla $j \geq 1$. Mamy zdefiniowane kompleksy X_1, \dots, X_j i odwzorowania f_1, \dots, f_j oraz podobnie jak w uwadze 2.8 mamy etykietowania $\Lambda_1, \dots, \Lambda_j$ kompleksów X_1, \dots, X_j odpowiednio, które są indukowane przez etykietowanie $\Lambda_{\mathcal{R}}$. Niech X_{j+1} będzie \mathcal{A}_{j+1} -ilorazem zestawu montażowego $\mathcal{A}_{j+1} = (\{Y_\sigma^{j+1}\}_{\sigma \in X_j}, \{i_{\rho\tau}^{j+1}\}_{\rho \subset \tau})$, gdzie

- $Y_\sigma^{j+1} = P_{\lambda_j(\sigma)}$ dla $\sigma \in X_j$;
- $i_{\rho\tau}^{j+1} = P_{z_{u_\tau^j(\rho)}}$ dla $\rho \subset \tau \in X_j$.

Niech $f_{j+1} : X_{j+1} \rightarrow X_j$ będzie odwzorowaniem indukowanym przez odwzorowania $f_\sigma : Y_\sigma^{j+1} \rightarrow X_j$ zdefiniowane przez złożenie $f_\sigma = (u_\sigma^j)^{-1} \circ \pi_{\lambda_j(\sigma)}$. Ostatecznie ustalamy etykietowanie Λ_{j+1} indukowane przez $\Lambda_{\mathcal{R}}$ jak w Uwadze 2.8.

Tak zdefiniowany ciąg odwrotny $\mathcal{I}(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{R}, \Lambda, \Lambda_{\mathcal{R}}) = (\{X_j : j = 0, 1, \dots\}, \{f_j : j = 0, 1, \dots\})$ nazywamy *konstruktywnym układem Markowa*, a jego granicę odwrotną *konstruktywnym kompaktem Markowa*.

Sprawdzenie, że powyższe obiekty są dobrze określone wymaga jedynie skrupulatnego prześledzenia definicji i zostało to zrobione w pracy [2].

2.2 Regularne drzewo grafów

Podstawowymi obiektami, na których będziemy się opierać są grafy. Wprowadzimy najpierw związaną z nimi terminologię i notację, których będziemy używać. Wiele z opisanych poniżej pojęć to pojęcia standardowe i elementarne, ale opisujemy je w celu sformalizowania używanego języka.

Notacja 2.9. Graf możemy rozważać w sensie kombinatorycznym, jako rodzinę co najwyżej dwuelementowych podzbiorów pewnego zbioru X . Wtedy każdy singleton z tej rodziny nazywamy *wierzchołkiem* grafu Γ . Ważnym warunkiem jest, aby singleton każdego elementu rozważanego zbioru X należał do tej rodziny i czasami utożsamiać będziemy taki singleton z jego jedynym elementem. Zbiór wszystkich wierzchołków oznaczamy będziemy przez V_Γ i możemy go utożsamiać we wspomniany sposób ze zbiorem X . Dwuelementowe podzbiory nazywamy *krawędziami* i zbiór wszystkich krawędzi grafu Γ oznaczamy przez E_Γ . Korzystając ze wspomnianego utożsamienia singletonów z ich elementami,

krawędź łączącą wierzchołki $v, w \in V_\Gamma$ oznaczamy $\{v, w\}$ i będziemy mówić, że wierzchołki v, w sąsiadują ze sobą. Dopuszczamy *pętle*, czyli krawędzie postaci $\{v, v\}$ oraz *krawędzie wielokrotne*, czyli kopie tej samej krawędzi $\{v, w\}$. Grafy, które takich krawędzi nie posiadają, spełniają definicje kompleksu symplecjoidalnego i nazywamy je *symplecjoidalnymi*.

Grafy, które będziemy rozważać będą same w sobie nieorientowane, ale dla każdego grafu określimy dodatkowo pewną orientację jego krawędzi. Dla krawędzi $e = \{v, w\} \in E_\Gamma$ grafu Γ ustalamy orientację otrzymując *zorientowaną* krawędź $\varepsilon = (v, w)$ (w tej pracy przyjęto nieformalną konwencję, w której obiekty mogące posiadać orientację oznaczamy literami alfabetu łacińskiego, gdy rozważamy je bez orientacji i literą alfabetu greckiego, gdy rozważamy je z orientacją). Wtedy oznaczamy *zorientowaną przeciwnie* do ε krawędź $\bar{\varepsilon} = (w, v)$; odpowiadającą ε i $\bar{\varepsilon}$ krawędź nieorientowaną: $|\varepsilon| = |\bar{\varepsilon}| = e$ oraz wierzchołki *początkowy*: $i(e) = i(\varepsilon) = v$ i *końcowy*: $t(e) = t(\varepsilon) = w$, wtedy $i(\bar{\varepsilon}) = t(\varepsilon)$ i $t(\bar{\varepsilon}) = i(\varepsilon)$ (ze względu na to i wprowadzone później podobne oznaczenia od tego momentu unikać będziemy "i" oraz "t" jako indeksów liczbowych). Zbiór wszystkich zorientowanych krawędzi dla grafu Γ (po dwie krawędzie $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$) oznaczmy przez \mathcal{E}_Γ .

Z każdym grafem Γ w naturalny sposób wiążemy przestrzeń topologiczną $|\Gamma|$, którą nazywamy *realizacją (geometryczną)* grafu Γ . Realizację możemy otrzymać między innymi przez iloraz

$$|\Gamma| = \bigsqcup_{e \in E_\Gamma} [0, 1]_e / \sim$$

rodziny odcinków jednostkowych, gdzie relacja równoważności \sim polega na odpowiednim sklejeniu końcami tych odcinków, które odpowiadają krawędziom zawierającym ten sam wierzchołek. Na przykład jeśli $i(e_1) = t(e_2)$, to mamy relację $[0, 1]_{e_1} \ni \{0\} \sim \{1\} \in [0, 1]_{e_2}$. Taki iloraz posiada standardową strukturę przestrzeni metrycznej, w której jest zwarty dla skończonego Γ . W dalszej części pracy będziemy utożsamiać graf z jego realizacją i będziemy pisać Γ interpretując jego naturę zgodnie z kontekstem.

Dla każdego wierzchołka $v \in V_\Gamma$ grafu Γ określamy zbiór jego *sąsiadów* $N_v = \{w \in V_\Gamma : \{v, w\} \in E_\Gamma\}$. Określamy też *stopień* $\deg(v)$ w Γ jako liczbę krawędzi zawierających wierzchołek v , czyli $\deg(v) = |\{e \in E_\Gamma : v \in e\}|$. Dla symplecjoidalnego grafu Γ definiujemy *link* wierzchołka v w grafie Γ , czyli zbiór $\text{Lk}(v, \Gamma) = \{p_1, \dots, p_{\deg(v)}\}$, który w zależności od potrzeb interpretujemy między innymi jako zbiór krawędzi wychodzących z v , ε -sferę w Γ o środku v , czy zbiór sąsiadów v (w przypadku grafu symplecjoidalnego liczba krawędzi wychodzących z danego wierzchołka jest równa liczbie połączonych z nim wierzchołków). Będziemy pisać $\text{Lk}(v)$ zamiast $\text{Lk}(v, \Gamma)$, gdy nie będzie to prowadzić do niejednoznaczności.

Przez *ścieżkę* w grafie Γ rozumiemy ciąg wierzchołków v_0, \dots, v_n oraz krawędzi e_1, \dots, e_n takich, że $e_j = \{v_j, v_{j-1}\}$, a przez *cykl* taką ścieżkę, w której $v_0 = v_n$, a wszystkie pozostałe wierzchołki są różne od v_0 i siebie nawzajem. Grafy, w których nie ma cykli i które są spójne nazywamy *drzewami* i zazwyczaj oznaczamy literą T . Rozważać będziemy drzewa dwudzielne, czyli takie T , w których mamy podział zbioru wierzchołków V_T na dwa podzbiory: V_T^c , którego elementy będziemy nazywać wierzchołkami *czarnymi* i V_T^b , którego elementy będziemy nazywać wierzchołkami *białymi*. Zauważmy, że w takim drzewie każda krawędź $e \in E_T$ ma jeden wierzchołek czarny, a drugi biały. Oznaczmy je odpowiednio $c(e)$ i $b(e)$. *Poddrzewo* drzewa T definiujemy naturalnie jako takie drzewo T' , że $V_{T'} \subset V_T$ i $E_{T'} \subset E_T$. Piszemy wtedy $T' \subset T$. Podział wierzchołków w drzewach dwudzielnych indukuje się na poddrzewa i dla poddrzewa $T' \subset T$ oznaczamy $V_{T'}^c = V_{T'} \cap V_T^c$ i $V_{T'}^b = V_{T'} \cap V_T^b$. Wyróżnimy specjalną rodzinę \mathcal{F}_T^c , składającą się ze wszystkich skończonych poddrzew F dwudzielnego drzewa T takich, że dla każdego białego wierzchołka $b \in V_F^b$ zbiór N_b sąsiadów b w T (składający się z czarnych wierzchołków) zawiera się w V_F . Takie poddrzewa (nie tylko skończone) nazywamy *c-poddrzewami* (w pracy [1] są to *b-subtrees* od angielskiego "black", podobnie czarne wierzchołki są oznaczone V_T^b , a białe V_T^w). Dla dowolnego zbioru wierzchołków $V \subset V_T$ oznaczamy przez $F(V)$ najmniejsze

c -poddziewo drzewa T zawierające wierzchołki V i będziemy mówić, że $F(V)$ jest rozpięte przez V . Będziemy jeszcze przywoływać pojęcie *końców* drzewa T , czyli zbioru ∂T składającego się z klas abstrakcji relacji równoważności zadanej na zbiorze *promieni*, czyli nieskończonych, posiadających wierzchołek początkowy ścieżek. Relacja ta jest zadana poprzez bycie tymi samymi ścieżkami poza skończonym fragmentem początkowym, to znaczy promienie o wierzchołkach v_0, v_1, \dots i w_0, w_1, \dots są w relacji, gdy istnieją m i n takie, że dla każdego $k \geq 0$ zachodzi $v_{m+k} = w_{n+k}$.

Poniższe definicje pochodzą z pracy [1].

Definicja 2.10 (Układ drzewiasty przestrzeni).

Układ drzewiasty przestrzeni to krotka $\Theta = (T, \{K_c\}, \{\Sigma_b\}, \{\varphi_e\})$, gdzie:

1. T to przeliczalne dwudzielne drzewo, w którym stopień $\deg(b)$ każdego białego wierzchołka $b \in V_T^b$ jest skończony.
2. Z każdym czarnym wierzchołkiem $c \in V_T^c$ skojarzona jest niepusta, zwarta przestrzeń metryczna K_c , którą nazywamy *przestrzenią składową* dla Θ .
3. Z każdym białym wierzchołkiem $b \in V_T^b$ skojarzona jest niepusta, zwarta przestrzeń metryczna Σ_b , którą nazywamy *przestrzenią peryferyjną* Θ .
4. Z każdą krawędzią $e \in E_T$ skojarzone jest topologiczne włożenie

$$\varphi_e : \Sigma_{b(e)} \rightarrow K_{c(e)},$$

które nazywamy *odwzorowaniem łączącym* Θ .

5. Dla każdego czarnego wierzchołka $c \in V_T^c$ para

$$(K_c, \{\varphi_{\{c,b\}}(\Sigma_b) : b \in N_c\})$$

jest *przestrzenią z peryferiami*, to znaczy rodzina $\{\varphi_{\{c,b\}}(\Sigma_b) : b \in N_c\}$ jest rodziną parami rozłącznych domkniętych podzbiorów K_c , posiadającą własność *zerowości*, co oznacza, że dla każdego $\varepsilon > 0$ wszystkie poza skończoną liczbą podzbiory z tej rodziny mają średnicę mniejszą od ε . Elementy tej rodziny nazywamy *peryferiami* K_c .

Definicja 2.11. [Standardowy system odwrotny związany z układem drzewiastym]

Rozważmy układ drzewiasty $\Theta = (T, \{K_c\}, \{\Sigma_b\}, \{\varphi_e\})$. Dla c -poddzewa $F \in \mathcal{F}_T^c$ definiujemy *częściową sumę* układu Θ jako przestrzeń ilorazową

$$K_F = \bigsqcup_{c \in V_F^c} K_c / \sim$$

gdzie \sim jest relacją równoważności indukowaną przez relacje

$$\varphi_{\{b,c_1\}}(x) \sim \varphi_{\{b,c_2\}}(x)$$

dla wszystkich $b \in V_F^b$, wszystkich $x \in \Sigma_b$ i wszystkich $c_1, c_2 \in N_b$. Oznaczmy przez

$$q_F : \bigsqcup_{c \in V_F^c} K_c \rightarrow K_F$$

odpowiadające odwzorowanie ilorazowe. Oznaczmy przez N_F zbiór tych (białych) wierzchołków $b \in V_T^b \setminus V_F^b$ drzewa T , leżących poza poddrzewem F , których jeden z sąsiadów jest wierzchołkiem F , czyli

$$N_F = \{b \in V_T^b \setminus V_F^b : (\exists c \in V_F) \{b, c\} \in E_T\}.$$

Dla każdego wierzchołka $b \in N_F$ oznaczmy przez c_b jedyny wierzchołek poddrzewa F sąsiadujący z b . Rozważmy rodzinę

$$\Omega_F = \{\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b) : b \in N_F\}$$

obrazów przestrzeni Σ_b w K_F . Para (K_F, Ω_F) jest przestrzenią z peryferiami. Oznaczmy przez

$$K_F^* = K_F / \Omega_F$$

przestrzeń ilorazową powstałą poprzez "sklejenie" zbiorów z rodziny Ω_F do punktów, to znaczy zadaną przez relację równoważności, której klasy abstrakcji to zbiory z rodziny Ω_F i singletony punktów z $K_F \setminus \bigcup \Omega_F$. K_F^* nazywamy *zredukowaną sumą częściową układu* Θ . Oznaczmy przez $q_F^* : K_F \rightarrow K_F^*$ odpowiadające odwzorowanie ilorazowe. Na rodzinie \mathcal{F}_T^c zadajemy częściowy porządek poprzez relację zawierania. Dla c -poddrzew $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_T^c$ takich, że $F_1 \subset F_2$, definiujemy odwzorowanie

$$f_{F_1 F_2} : K_{F_2}^* \rightarrow K_{F_1}^*$$

w następujący sposób. Dla każdego białego wierzchołka $b \in V_{F_2}^b \cap N_{F_1}$ oznaczmy przez \mathcal{V}_b te czarne wierzchołki $c \in V_{F_2}^c \setminus V_{F_1}$, dla których najkrótsza ścieżka łącząca je z poddrzewem F_1 , przechodzi przez wierzchołek b . Przez S_b oznaczmy najmniejsze c -poddrzewo drzewa F_2 zawierające wierzchołki z \mathcal{V}_b . Częściowa suma K_{S_b} w naturalny sposób wkłada się w K_{F_2} . Rozważmy podzbiory $q_{F_2}^*(K_{S_b}) \subset K_{F_2}^*$. Zauważmy, że "sklejając do punktu" taki zbiór dla każdego $b \in N_{F_1}$ (w tym samym sensie co w przypadku K_F / Ω_F) otrzymamy iloraz $K_{F_2}^*$, który w kanoniczny sposób jest homeomorficzny z $K_{F_1}^*$ i będziemy utożsamiać $K_{F_1}^*$ z tym ilorazem. Niech odwzorowanie $f_{F_1 F_2} : K_{F_2}^* \rightarrow K_{F_1}^*$ będzie odpowiadającym odwzorowaniem ilorazowym. Jest ono ciągle i surjektywne. Łatwo też zobaczyć, że dla dowolnych $F_1 \subset F_2 \subset F_3$ z \mathcal{F}_T^c mamy $f_{F_1 F_2} \circ f_{F_2 F_3} = f_{F_1 F_3}$. Otrzymujemy zatem system odwrotny

$$\mathcal{S}_\Theta = (\{K_F^* : F \in \mathcal{F}_T^c\}, \{f_{F_1 F_2} : F_1 \subset F_2, F_1, F_2 \in \mathcal{F}_T^c\})$$

nad częściowo uporządkowanym zbiorem \mathcal{F}_T^c . Będziemy nazywać go *standardowym system odwrotnym związanym z Θ* .

Notacja 2.12. Rozważmy skończone c -poddrzewo F drzewa T z układu drzewiastego Θ jak wyżej.

- Dla $b \in N_F$ oznaczać będziemy przez c_b jedyny czarny wierzchołek poddrzewa F , który jest sąsiadem b . Będziemy zajmować się drzewami, w których stopień $\deg(b) = 2$ dla każdego białego wierzchołka $b \in V_T^b$. Wtedy drugiego sąsiada b oznaczać będziemy przez c^b .
- Mamy jednoznaczność pomiędzy zbiorami Ω_F , a N_F . Mianowicie każdemu białemu wierzchołkowi $b \in N_F$ możemy przyporządkować peryferium $o \in \Omega_F$ takie, że

$$q_F(\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b)) = o.$$

Tak przyporządkowane sobie wierzchołki i peryferia będziemy oznaczać b_o lub $b(o)$ i o_b lub $o(b)$ odpowiednio, w zależności od tego, który obiekt chcemy przyporządkować któremu.

- Oznaczmy przez $\Omega_F^* = q_F^*(\bigcup \Omega_F)$ obraz przez odwzorowanie ilorazowe q_F^* wszystkich peryferiów. Ponownie mamy jednoznaczność pomiędzy punktami $x \in \Omega_F^*$, a peryferiami $o \in \Omega_F$ zadaną przez $q_F^*(o) = \{x\}$. Oznaczmy jak wyżej przez x_o lub $x(o)$ i o_x lub $x(o)$ tak przyporządkowane sobie obiekty.
- Korzystając z dwóch powyższych odpowiedniości możemy też wprowadzić oznaczenie x_b lub $x(b)$ i b_x lub $b(x)$ na odpowiadające sobie punkt $x \in \Omega_F^*$ i wierzchołek $b \in N_F$ ($x(b) = x(o(b))$, itd.).

Definicja 2.13 (Granica układu drzewiastego).

Z układem drzewiastym $\Theta = (T, \{K_c\}, \{\Sigma_b\}, \{\varphi_e\})$ w kanoniczny sposób wiążemy przestrzeń, którą nazywamy *granica układu drzewiastego* i oznaczamy ją $\lim \Theta$. Jako zbiór składa się ona z ilorazu

$$\bigsqcup_{c \in V_T^c} K_c / \sim$$

zdefiniowanego podobnie jak częściowe sumy K_F przez relacje

$$\varphi_{\{b, c_1\}}(x) \sim \varphi_{\{b, c_2\}}(x)$$

dla wszystkich $b \in V_T^b$, wszystkich $x \in \Sigma_b$ i wszystkich $c_1, c_2 \in N_b$ oraz ze zbioru ∂T końców drzewa T . W pracy [1] zadana jest topologia na $\lim \Theta = (\bigsqcup_{c \in V_T^c} K_c / \sim) \cup \partial T$. Można jednak pokazać i jest to odnotowane we wspomnianej pracy, że granica ta jest w kanoniczny sposób homeomorficzna z granicą odwrotną standardowego systemu odwrotnego \mathcal{S}_Θ . Ponieważ będziemy korzystać z opisu regularnego drzewa grafu poprzez ten system odwrotny, to w tej pracy zdefiniujemy $\lim \Theta := \varprojlim \mathcal{S}_\Theta$.

Definicja 2.14 (Graf nakłuty).

Dla danego niepustego grafu Γ bez izolowanych wierzchołków (wierzchołków, z których nie wychodzi żadna krawędź) definiujemy przestrzeń z peryferiami $(\Gamma^\circ, \Omega_\Gamma)$, którą nazywamy *grafem nakłutym (perforowanym)*. Dla każdego punktu $x \in \Gamma$ rozważmy *normalne otoczenie* punktu x w Γ , czyli spójne, domknięte otoczenie $B(x)$ punktu x w Γ takie, że jego przekrój ze zbiorem wierzchołków jest pusty lub równy $\{x\}$ (gdy x jest wierzchołkiem grafu Γ). Oznaczmy przez $\text{int } B(x)$ wnętrze i przez $\text{bd } B(x)$ brzeg zbioru $B(x)$ w Γ . *Standardowa gęsta rodzina normalnych otoczeń w Γ* to dowolna rodzina parami rozłącznych normalnych otoczeń w Γ zawierająca normalne otoczenia wszystkich wierzchołków Γ i której suma jest gęsta w Γ . Niech \mathcal{N}_Γ będzie standardową gęstą rodziną normalnych otoczeń w Γ . Definiujemy

$$\Gamma^\circ = \Gamma \setminus \bigcup \{\text{int } B : B \in \mathcal{N}_\Gamma\}$$

oraz

$$\Omega_\Gamma = \{\text{bd } B : B \in \mathcal{N}_\Gamma\}.$$

Wprowadźmy też wygodne oznaczenie dla dowolnej krawędzi $e \in E_\Gamma$ niech $e^\circ = e \cap \Gamma^\circ$.

Uwaga 2.15. Zauważmy, że każda standardowa gęsta rodzina normalnych otoczeń w Γ jak w powyższej definicji jest automatycznie przeliczalna oraz ma własność zerowości, którą opisaliśmy przy wyjaśnieniu pojęcia przestrzeni z peryferiami, to znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ wszystkie poza skończoną liczbą zbiory z tej rodziny mają średnicę mniejszą od ε . Co więcej taka rodzina jest jedyna z dokładnością do homeomorfizmu Γ , który przeprowadza każdy wierzchołek i każdą krawędź na siebie. Jest to dość ważny fakt, który pozwala stwierdzać, że pewne konstrukcje prowadzą do tożsamyh przestrzeni topologicznych, co z kolei często będziemy wskazywać bez dowodu. W świetle tego faktu nakłuty graf Γ° jest dobrze określoną zwartą przestrzenią metryczną, w której rodzina Ω_Γ ma własność zerowości. Zauważmy też, że peryferiom $o \in \Omega_\Gamma$ można w jednoznaczny sposób przypisać wierzchołek lub krawędź grafu Γ . Oznaczmy zatem przez $\Omega_\Gamma^V \subset \Omega_\Gamma$ zbiór tych peryferiów $o = \text{bd } B$, dla których normalne otoczenie B zawiera wierzchołek grafu Γ . Elementy Ω_Γ^V będziemy nazywać *V-peryferiami*. Podobnie definiujemy zbiór *E-peryferiów* $\Omega_\Gamma^E \subset \Omega_\Gamma$ jako zbiór tych $\text{bd } B$, dla których normalne otoczenie B jest w całości zawarte w pewnej krawędzi grafu Γ . *E-peryferia* zawsze są zbiorami dwupunktowymi. Będziemy dla nich definiować orientację. Niech $o = \text{bd } B \in \Omega_\Gamma$ będzie *E-peryferium* zawartym w krawędzi $e \in V_\Gamma$ i niech ε będzie dowolną orientacją krawędzi e . Wnętrze $\text{int } B$ normalnego otoczenia B dzieli krawędź e na dwie komponenty spójności i w każdej z tych komponent leży po jednym punkcie z peryferium $\text{bd } B$. Oznaczmy przez $p_i \in \text{bd } B$ ten punkt, który leży w tej samej komponentce $e \setminus (\text{int}$

B) co $i(\varepsilon)$ i przez p_t ten punkt, który leży w drugiej komponentce, a więc w tej co $t(\varepsilon)$. Oznaczmy przez $\omega = (p_i, p_t)$ zorientowane peryferium bd $B = \{p_i, p_t\}$. W takim przypadku będziemy mówić, że ω jest *zorientowane zgodnie z ε* i będziemy pisać $\omega \prec \varepsilon$. Oznaczmy też przez $\bar{\omega} = (p_t, p_i)$ to samo peryferium zorientowane przeciwnie. Zauważmy, że wtedy $\bar{\omega} \prec \bar{\varepsilon}$. Zbiór wszystkich zorientowanych E -peryferiów będziemy oznaczać $\tilde{\Omega}_\Gamma^E$. Dla dowolnego zorientowanego E -peryferium ω przez $|\omega|$ oznaczamy jego niezorientowany odpowiednik.

Definicja 2.16. [Grafowy układ łączący]

Grafowy układ łączący to trójka $\mathcal{R} = (\Gamma, \mathbf{a}, \mathcal{A})$, gdzie:

- a) $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^N \Gamma_j$ jest sumą rozłączną skończonej, niepustej kolekcji nietrywialnych, skończonych i spójnych grafów Γ_j , które będziemy nazywać komponentami Γ .
- b) $\mathbf{a} = (a, \{\alpha_v\}_{v \in V_\Gamma})$ to para składająca się z inwolucji $a : V_\Gamma \rightarrow V_\Gamma$ zbioru wierzchołków Γ zachowującej stopnie wierzchołków i z bijekcji $\alpha_v : \text{Lk}(v) \rightarrow \text{Lk}(a(v))$ takich, że dla każdego $v \in V_\Gamma$ mamy $\alpha_{a(v)} \circ \alpha_v = \text{id}_{\text{Lk}(v)}$; tę część układu \mathcal{R} nazywamy *V -inwolucją* dla Γ .
- c) \mathcal{A} jest zbiorem par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ zorientowanych krawędzi Γ takim, że jeśli $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{A}$, to $(\varepsilon_2, \varepsilon_1) \in \mathcal{A}$ i $(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) \in \mathcal{A}$ oraz dla każdego $\varepsilon \in \mathcal{E}_\Gamma$ w \mathcal{A} istnieje przynajmniej jedna para zawierająca ε ; zbiór \mathcal{A} nazywamy zbiorem *E -połączeń* dla Γ .

Będziemy wymagać również następującej *własności tranzytywności*: dla dowolnych różnych komponent Γ_j, Γ_k grafu Γ istnieje ciąg indeksów $j(0), \dots, j(m)$ ze zbioru $\{1, \dots, N\}$ taki, że $j(0) = j$, $j(m) = k$ i dla każdego $1 \leq l \leq m$ zachodzi przynajmniej jeden z warunków:

- i) dla pewnego $v \in V_{\Gamma_{j(l-1)}}$ mamy $a(v) \in V_{\Gamma_{j(l)}}$;
- ii) dla pewnej zorientowanej krawędzi $\varepsilon \in \mathcal{E}_{\Gamma_{j(l-1)}}$ istnieje zorientowana krawędź $\varepsilon' \in \mathcal{E}_{\Gamma_{j(l)}}$ taka, że $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{A}$.

Definicja 2.17. [Regularne drzewo grafów]

Mówimy, że układ drzewiasty $\Theta = (T, \{K_c\}, \{\Sigma_b\}, \{\varphi_\varepsilon\})$ jest *zgodny* z grafowym układem łączącym $\mathcal{R} = (\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^N \Gamma_j, \mathbf{a}, \mathcal{A})$, gdy zachodzą następujące warunki:

1. T jest jedynym przeliczalnym dwudzielnym drzewem takim, że stopień $\deg(b) = 2$ dla każdego białego wierzchołka $b \in V_T^b$, a stopień $\deg(c)$ każdego czarnego wierzchołka $c \in V_T^c$ jest przeliczalny nieskończony.
2. Dla każdego czarnego wierzchołka $c \in V_T^c$, istnieje indeks $j(c) \in \{1, \dots, N\}$ taki, że $K_c \cong \Gamma_{j(c)}^\circ$.
3. Dla każdego białego wierzchołka $b \in V_T^b$ i jego obu sąsiadów $c_1, c_2 \in N_b$
 - a) jeśli obraz $\varphi_{\{b, c_1\}}(\Sigma_b)$ jest V -peryferium w $K_{c_1} \cong \Gamma_{j(c_1)}^\circ$ odpowiadającym wierzchołkowi $v \in V_{\Gamma_{j(c_1)}}$, to obraz $\varphi_{\{b, c_2\}}(\Sigma_b)$ jest V -peryferium w $K_{c_2} \cong \Gamma_{j(c_2)}^\circ$ odpowiadającym wierzchołkowi $a(v) \in V_{\Gamma_{j(c_2)}}$. Ponadto złożenie $\varphi_{\{b, c_2\}} \circ \varphi_{\{b, c_1\}}^{-1}$ jest równe bijekcji α_v po naturalnym utożsamieniu elementów linków z elementami V -peryferiów dla wierzchołków v i $a(v)$.
 - b) jeśli $\varphi_{\{b, c_1\}}(\Sigma_b)$ jest E -peryferium w $K_{c_1} \cong \Gamma_{j(c_1)}^\circ$, to $\varphi_{\{b, c_2\}}(\Sigma_b)$ jest E -peryferium w $K_{c_2} \cong \Gamma_{j(c_2)}^\circ$. Ponadto niech $e_1 \in E_{\Gamma_{j(c_1)}}$ będzie krawędzią zawierającą $\varphi_{\{b, c_1\}}(\Sigma_b)$ i niech ε_1 będzie dowolnie wybraną orientacją krawędzi e_1 . Niech $\omega_1 \prec \varepsilon_1$ będzie orientacją $\varphi_{\{b, c_1\}}(\Sigma_b)$ zgodną z ε_1 . Wtedy na $\varphi_{\{b, c_2\}}(\Sigma_b)$ mamy orientację ω_2 indukowaną przez odwzorowanie $\varphi_{\{b, c_2\}} \circ \varphi_{\{b, c_1\}}^{-1}$ i orientację ε_2 krawędzi $e_2 \in E_{\Gamma_{j(c_2)}}$ zawierającej $\varphi_{\{b, c_2\}}(\Sigma_b)$ zgodną z ω_2 . Wtedy $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{A}$.

4. a) Dla każdego wierzchołka $c \in V_T^c$ i dla każdego wierzchołka $v \in V_{\Gamma_{j(c)}}$ istnieje $b \in N_c$ taki, że $\varphi_{\{b,c\}}(\Sigma_b) = o_v$, gdzie $o_v \in \Omega_{\Gamma_{j(c)}}^V$ jest V -peryferium pochodzącym od normalnego otoczenia wierzchołka v w $\Gamma_{j(c)}$.
- b) Dla każdego wierzchołka $c \in V_T^c$, dla każdej krawędzi $e \in E_{\Gamma_{j(c)}}$ i dla dowolnej orientacji ε krawędzi e oznaczymy przez Ω_ε rodzinę E -peryferiów $\Gamma_{j(c)}^\circ$ zawartych w krawędzi $e^\circ = e \cap \Gamma^\circ$ i zorientowanych zgodnie z ε oraz oznaczymy $A_\varepsilon = \{\varepsilon' \in \mathcal{E}_\Gamma : (\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{A}\}$. Rozważmy przyporządkowanie $\psi_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow A_\varepsilon$ indukowane jak w (3.b)) przez złożenia $\varphi_{\{b,c'\}} \circ \varphi_{\{b,c\}}^{-1}$, dla odpowiednich $b \in N_c$ i $c \neq c' \in N_b$ (z oznaczeniami z (3.b)): $\psi_{\varepsilon_1}(\omega_1) = \varepsilon_2$). Wtedy dla każdego $\varepsilon' \in A_\varepsilon$ zbiór $\bigcup \psi^{-1}(\{\varepsilon'\})$ jest gęsty (w szczególności niepusty) w e° .

Cytując [1] takie Θ zgodne z \mathcal{R} istnieje i jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu układów drzewiastych, z czego wynika, że $\lim \Theta$ jest jednoznaczne z dokładnością do homeomorfizmu. Możemy zatem sformułować następującą definicję. *Regularne drzewo grafów* dla grafowego układu łączącego \mathcal{R} to przestrzeń $\mathcal{X}(\mathcal{R}) = \lim \Theta$, gdzie Θ jest dowolnym układem drzewiastym zgodnym z \mathcal{R} .

Uwaga 2.18. Z warunku tranzytywności Definicji 2.16 oraz z warunku (4) w powyższej Definicji 2.17 wynika, że dla każdego $j \in \{1, \dots, N\}$ istnieje $c \in V_T^c$ taki, że $j(c) = j$.

Uwaga 2.19. Jeśli w układzie drzewiastym Θ przestrzenie składowe K_c są grafami nakłutymi (w szczególności, jeśli Θ jest zgodny z pewnym grafowym układem łączącym), to dla każdego skończonego c -poddrzewa $F \subset T$, w rodzinie peryferiów Ω_F sumy częściowej K_F można wyróżnić peryferia wierzchołkowe i krawędziowe. Korzystając z oznaczeń w 2.12 dla każdego $o \in \Omega_F$ i odpowiadającego mu białego wierzchołka $b(o)$, jeśli $\varphi_{\{b(o), c_{b(o)}\}}(\Sigma_b)$ jest peryferium wierzchołkowym w K_{c_b} , to o też przyjmujemy za peryferium wierzchołkowe. Jeśli nie, to $\varphi_{\{b(o), c_{b(o)}\}}(\Sigma_b)$ jest peryferium krawędziowym i podobnie przyjmujemy wtedy o za peryferium krawędziowe. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \Omega_F^V &= \{o \in \Omega_F : (\exists b \in N_F) q_F(\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b)) = o \text{ i } \varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b) \in \Omega_{c_b}^V\} \\ \Omega_F^E &= \{o \in \Omega_F : (\exists b \in N_F) q_F(\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b)) = o \text{ i } \varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b) \in \Omega_{c_b}^E\} \end{aligned}$$

3 Konstruktywny kompakt Markowa odpowiadający regularnemu drzewu grafów

Ten i następny rozdział stanowią zasadniczą, oryginalną część pracy. W tym rozdziale dla danego regularnego drzewa grafów, a dokładniej dla zadającego go grafowego układu łączącego, podamy konstrukcję konstruktywnego kompaktu Markowa, by w następnym rozdziale pokazać, że jest on homeomorficzny z wyjściowym regularnym drzewem grafów. Zaczniemy od formalnej definicji poszczególnych danych, zadających konstruktywny układ Markowa, a potem w podrozdziale 3.5 wyjaśnimy bardziej nieformalnie przebieg konstrukcji, korzystając z wprowadzonych wcześniej oznaczeń.

Uwaga 3.1. Ze względu na kolizję oznaczeń w pracach [1] i [2] w konstruktywnym układzie Markowa dobrą rodziną reguł podmiany pędziemy oznaczać przez \mathcal{P} zamiast \mathcal{R} , a układ montażowy przez \mathcal{B} zamiast \mathcal{A} i będziemy pisać \mathcal{B} -iloraz.

Rozważmy dowolny grafowy układ łączący $\mathcal{R} = (\Gamma, \mathbf{a}, \mathcal{A})$, gdzie $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^N \Gamma_j$. Na każdej krawędzi $e = \{v, w\} \in E_\Gamma$ ustalamy pewną orientację $\varepsilon = (v, w)$. Będziemy się odnosić do tej orientacji jako do *standardowej*, co znaczy, że $i(e) = i(\varepsilon)$. Dla każdego $\varepsilon \in \mathcal{E}_\Gamma$ ustalmy pewną numerację skojarzonych z nim poprzez zbiór E -połączeń krawędzi, mianowicie $A_\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_\varepsilon}\}$, gdzie $A_\varepsilon = \{\varepsilon' \in \mathcal{E}_\Gamma : (\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{A}\}$. Ustalmy też funkcję $\Gamma \ni \sigma \mapsto j(\sigma) \in \{1, \dots, k\}$, pomiędzy sympleksami w Γ , a indeksami komponent grafu Γ taką, że $\sigma \subset \Gamma_{j(\sigma)}$.

Uwaga 3.2. Możemy założyć, że każdy z grafów Γ_j jest sympleksyjny. W przeciwnym wypadku konstruujemy równoważny grafowy układ łączący \mathcal{R}' , którego regularne drzewo grafów jest homeomorficzne z wyjściowym. Konstrukcja ta ma odpowiadać pozbyciu się każdej z pętli oraz wielokrotnych krawędzi, poprzez podzielenie odpowiedniej krawędzi na dwie nowe za pomocą nowego wierzchołka. Po jednej takiej operacji jedna pętla daje podwójną krawędź lub liczba krawędzi wielokrotnych przy tej samej parze wierzchołków zmniejsza się o 1. Trzeba zatem tę procedurę powtarzać do momentu pozbycia się wszystkich krawędzi wielokrotnych, co możemy zrobić w skończenie wielu poniżej opisanych krokach. Niech e będzie krawędzią, którą chcemy podzielić. Wtedy grafowy układ łączący modyfikujemy następująco:

- Niech ε będzie standardową orientacją krawędzi e i niech ε' będzie dowolną zorientowaną krawędzią grafu Γ taką, że $(\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{A}$. Niech p będzie barycentrum krawędzi e i niech p' będzie barycentrum tej krawędzi $e' \in E_\Gamma$, dla której $|\varepsilon'| = e'$. W kombinatorycznym sensie do grafu Γ dokładamy dwa nowe wierzchołki p i p' oraz zastępujemy krawędzie $\varepsilon = (i(\varepsilon), t(\varepsilon))$ i $\varepsilon' = (i(\varepsilon'), t(\varepsilon'))$ przez krawędzie $\varepsilon_i = (i(\varepsilon), p)$, $\varepsilon_t = (p, t(\varepsilon))$, $\varepsilon'_i = (i(\varepsilon'), p')$, $\varepsilon'_t = (p', t(\varepsilon'))$, gdzie $|\varepsilon| = e$ i $|\varepsilon'| = e'$. W sensie topologicznym sytuacja pozostaje bez zmian, to znaczy $e = |\varepsilon_i| \cup |\varepsilon_t|$ i $e' = |\varepsilon'_i| \cup |\varepsilon'_t|$.
- Inwolucję a rozszerzamy o $a(p) = p'$.
- Niech $\text{Lk}(p) = \{p_i, p_t\}$, gdzie $p_i \in \varepsilon_i$ i $p_t \in \varepsilon_t$ i niech $\text{Lk}(p') = \{p'_i, p'_t\}$ będzie zdefiniowane analogicznie. Definiujemy $\alpha_p(p_i) = p'_i$ i $\alpha_p(p_t) = p'_t$.
- Każdą parę $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \mathcal{A}$, dla której $\varepsilon_1 = \varepsilon$ zastępujemy dwoma parami: $(\varepsilon_i, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon_t, \varepsilon_2)$. Każdą parę, dla której $\varepsilon_2 = \varepsilon$ zastępujemy parami $(\varepsilon_1, \varepsilon_i)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_t)$. Podobnie dla ε' .

Zauważmy, że normalne otoczenia wierzchołków p , p' w Γ można utożsamić z pewnymi normalnymi otoczeniami zawartymi w krawędziach e i e' . Można tak dobrać pewne homeomorfizmy krawędzi e i krawędzi e' , by utożsamić te otoczenia i dobrać uwzględniający te homeomorfizmy układ drzewiasty zgodny z opisanym grafowym układem łączącym \mathcal{R}' , by w pewnym sensie generował te same "sklejania" w tych otoczeniach, co dowolny układ drzewiasty zgodny z \mathcal{R} . W konsekwencji jego granica będzie homeomorficzna z regularnym drzewem grafów dla \mathcal{R} . Nie będziemy tego jednak ściśle pokazywać. Metoda do tego niezbędna zostanie użyta w dowodzie zasadniczego twierdzenia.

Przystąpimy teraz do definiowania konstruktywnego układu Markowa dla układu \mathcal{R} przy założeniu tezy powyższej uwagi.

3.1 Dobra rodzina sympleksów

Rozważmy rodzinę Σ składającą się z następujących sympleksów:

- "martwy" 0-sympleks: \star ;
- 0-sympleks v dla każdego $v \in V_\Gamma$ (możemy myśleć o nim jak o kopii wierzchołka v);
- 1-sympleks e^0 dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$;
- 1-sympleks e^i dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$;
- 1-sympleks e^t dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$;
- 1-sympleks e^k dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$ oraz $k \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$, gdzie $\varepsilon = (i(e), t(e))$ jest standardową orientacją krawędzi e , a n_ε liczbą skojarzonych z ε krawędzi zorientowanych, czyli elementów zbioru A_ε .

Zauważmy, że zbiór B wszystkich właściwych ścian sympleksów z Σ składa się wyłącznie z wierzchołków 1-sympleksów. Rozważmy dowolną krawędź $e = \{i(e), t(e)\} \in E_\Gamma$ i odpowiadające jej 1-sympleksy e^0, e^i, e^t, e^k , $k = 1, \dots, n_e$. W każdym z tych sympleksów oznaczmy jeden wierzchołek przez β_i , a drugi przez β_t . Wskażemy sympleksy σ_β i zdefiniujemy odwzorowania z_β dla $\beta \in B$.

- Definiujemy $\sigma_\beta = \star$ i $z_\beta : \star \mapsto \beta$ dla dowolnego $\beta \in e^k$ oraz dla $\beta = \beta_t \in e^t$ i $\beta = \beta_i \in e^i$.
- Definiujemy $\sigma_\beta = v$ i $z_\beta : v \mapsto \beta$, gdzie:
 - $v = i(e)$, gdy $\beta = \beta_i \in e^0$ lub $\beta = \beta_i \in e^i$,
 - $v = t(e)$, gdy $\beta = \beta_t \in e^0$ lub $\beta = \beta_t \in e^t$.

Tak zdefiniowana para $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$ spełnia definicję dobrej rodziny sympleksów.

3.2 Dobra rodzina reguł podmiany

Zanim przystąpimy do definiowania dobrej rodziny reguł podmiany, wprowadźmy definicję pomocniczych kompleksów, które posłużą nam do konstrukcji.

Definicja 3.3.

Dla wierzchołka $v \in V_\Gamma$ konstruujemy graf $\Gamma_v^\#$. Rozważmy komponentę $\Gamma_{j(v)}$ grafu Γ zawierającą wierzchołek v , krawędzie $e_1, \dots, e_d \in E_\Gamma$ zawierające wierzchołek v i odpowiednio połączone z nim tymi krawędziami wierzchołki $v_1, \dots, v_d \in V_\Gamma$, gdzie d to stopień wierzchołka v w grafie Γ . Definiujemy $\Gamma_v^\#$ przez jego wierzchołki i krawędzie:

$$V_{\Gamma_v^\#} = (V_{\Gamma_{j(v)}} \setminus \{v\}) \sqcup \{v'_1, \dots, v'_d\}$$

$$E_{\Gamma_v^\#} = (E_{\Gamma_{j(v)}} \setminus \{e_1, \dots, e_d\}) \sqcup \{e'_1, \dots, e'_d\},$$

gdzie $e'_j = \{v_j, v'_j\}$, dla $j = 1, \dots, d$. Ustalmy też orientację krawędzi e'_j poprzez $i(e'_j) = v'_j$ i $t(e'_j) = v_j$, gdy $v = i(e_j)$ lub $i(e'_j) = v_j$ i $t(e'_j) = v'_j$, gdy $v = t(e_j)$. W tak zdefiniowanym grafie $\Gamma_v^\#$ wyróżnimy pewne podzbiory wierzchołków i krawędzi:

- Podzbiór wierzchołków $V_{\Gamma_{j(v)}} \setminus \{v\} \subset V_{\Gamma_v^\#}$ nazwijmy wierzchołkami *wewnętrznymi* i oznaczmy przez $V^{\text{int}}(\Gamma_v^\#)$.
- Podzbiór wierzchołków $\{v'_1, \dots, v'_d\} \subset V_{\Gamma_v^\#}$ nazwijmy wierzchołkami *brzegowymi* i oznaczmy przez $V^{\text{bd}}(\Gamma_v^\#)$.
- Podzbiór krawędzi $E_{\Gamma_{j(v)}} \setminus \{e_1, \dots, e_d\} \subset E_{\Gamma_v^\#}$ nazwijmy krawędziami *wewnętrznymi* i oznaczmy przez $E^{\text{int}}(\Gamma_v^\#)$.
- Podzbiór krawędzi $\{e'_1, \dots, e'_d\} \subset E_{\Gamma_v^\#}$ dzielimy na dwa podzbiory:
 - $E^i(\Gamma_v^\#) = \{e'_j : j \in \{1, \dots, d\}, t(e_j) = v\}$, który nazwiemy krawędziami *wychodzącymi* i
 - $E^t(\Gamma_v^\#) = \{e'_j : j \in \{1, \dots, d\}, i(e_j) = v\}$, który nazwiemy krawędziami *wchodzącymi*.

Każdej krawędzi e'_j jak wyżej możemy jednoznacznie przypisać krawędź e_j zawierającą wierzchołek v_j , która jest krawędzią w grafie Γ . Będzie to dla nas ważne, ponieważ podczas etykietowania odpowiednim sympleksom przypisywać będziemy sympleksy z rodziny Σ poprzez ich odpowiedniość z sympleksami grafu Γ . Dlatego już teraz wprowadzimy następujące oznaczenie dla $\tau = e'_j \in E^i(\Gamma_v^\#) \cup E^t(\Gamma_v^\#)$ niech $\tilde{\tau} = e_j$.

Dla krawędzi $e \in E_\Gamma$ konstruujemy graf $\Gamma_e^\#$. Rozważmy komponentę $\Gamma_{j(e)}$ grafu Γ zawierającą krawędź e oraz wierzchołki $i(e)$, $t(e)$ tej krawędzi. Definiujemy

$$V_{\Gamma_e^\#} = V_{\Gamma_{j(e)}} \sqcup \{w_i, w_t\}$$

$$E_{\Gamma_e^\#} = (E_{\Gamma_{j(e)}} \setminus \{e\}) \sqcup \{e'_i, e'_t\},$$

gdzie $e'_i = \{i(e), w_i\}$ i $e'_t = \{t(e), w_t\}$. Ustalamy też orientacje krawędzi e'_i i e'_t poprzez $i(e'_i) = i(e)$, $t(e'_i) = w_i$ oraz $i(e'_t) = w_t$, $t(e'_t) = t(e)$. W tak zdefiniowanym grafie $\Gamma_e^\#$ wyróżnimy pewne podzbiory wierzchołków i krawędzi:

- Podzbiór wierzchołków $V_{\Gamma_{j(e)}} \setminus \{v\} \subset V_{\Gamma_e^\#}$ nazwijmy wierzchołkami *wewnętrznymi* i oznaczmy przez $V^{\text{int}}(\Gamma_e^\#)$.
- Podzbiór krawędzi $E_{\Gamma_{j(e)}} \setminus \{e\} \subset E_{\Gamma_e^\#}$ nazwijmy krawędziami *wewnętrznymi* i oznaczmy przez $E^{\text{int}}(\Gamma_e^\#)$.
- Wierzchołki w_i, w_t nazwijmy *brzegowymi*.

Uwaga 3.4.

1. W topologicznym sensie graf $\Gamma_v^\#$ powstaje z grafu $\Gamma_{j(v)}$ poprzez wycięcie zbioru $\text{int } B(v)$, gdzie $B(v)$ to pewne normalnie otoczenie wierzchołka v w Γ . Graf $\Gamma_v^\#$ jest też homeomorficzny z tak zwanym blowupem grafu $\Gamma_{j(v)}$ w wierzchołku v , który jest opisany w pracy [1]. Podobnie graf $\Gamma_e^\#$ powstaje poprzez usunięcie zbioru $\text{int } B$ dla jakiegoś normalnego otoczenia B zawartego w krawędzi e .
2. Zauważmy, że mamy jednoznaczność odpowiedniości pomiędzy wierzchołkami v'_1, \dots, v'_d grafu $\Gamma_v^\#$, a elementami linku $\text{Lk}(v)$ wierzchołka v w grafie Γ . Każdemu punktowi $p \in \text{Lk}(v)$ odpowiada krawędź $e_p := e_j \in E_\Gamma$ dla pewnego $1 \leq j \leq d$. Tej krawędzi odpowiada krawędź $e'_p := e'_j \in E_{\Gamma_v^\#}$, a jej możemy przypisać wierzchołek $v'_p := v'_j$. Dostajemy zatem odwzorowanie $\text{Lk}(v) \ni p \mapsto v'_p \in \{v'_1, \dots, v'_d\}$.

Niech $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$ będzie zdefiniowaną w poprzednim podrozdziale dobrą rodziną sympleksów. Dla każdego $\sigma \in \Sigma$ określimy regułę podmiany (P_σ, π_σ) oraz dla właściwych ścian $\beta \subset \sigma$ określimy odwzorowania $P_{z_\beta} : P_{\sigma_\beta} \rightarrow P_\sigma$.

- Dla 0-sympleksu \star niech $P_\star = \star$ i $\pi_\star = \text{id}_\star$.
- Dla 0-sympleksu v niech $P_v = \Gamma_{a(v)}^\#$, gdzie $\Gamma_{a(v)}^\#$ jest zdefiniowanym wyżej grafem dla wierzchołka odpowiadającego wierzchołkowi v przez involucję a . Niech $\pi_v : P_v \rightarrow v$ będzie jedynym możliwym odwzorowaniem.
- Dla 1-sympleksu e^0 odpowiadającego krawędzi $e = \{i(e), t(e)\} \in E_\Gamma$ rozważmy powyżej zdefiniowane kompleksy $P_{i(e)} = \Gamma_{a(i(e))}^\#$ i $P_{t(e)} = \Gamma_{a(t(e))}^\#$. Mamy bijekcje $\alpha_{i(e)} : \text{Lk}(i(e)) \rightarrow \text{Lk}(a(i(e)))$ oraz $\alpha_{t(e)} : \text{Lk}(t(e)) \rightarrow \text{Lk}(a(t(e)))$. Niech $p_i \in \text{Lk}(i(e))$ będzie tym punktem, który odpowiada krawędzi e , podobnie $p_t \in \text{Lk}(t(e))$. Oznaczmy przez v_{p_i} wierzchołek grafu $\Gamma_{a(i(e))}^\#$, który odpowiada punktowi $\alpha_{i(e)}(p_i) \in \text{Lk}(a(i(e)))$ zgodnie z uwagą 3.4 (tam ten wierzchołek to $v'_{\alpha_{i(e)}(p_i)}$). Podobnie oznaczmy przez v_{p_t} wierzchołek grafu $\Gamma_{a(t(e))}^\#$, który odpowiada punktowi $\alpha_{t(e)}(p_t) \in \text{Lk}(a(t(e)))$. $P_{i(e)}$ i $P_{t(e)}$ to grafy. P_{e^0} definiujemy również jako graf. Niech

$$V_{P_{e^0}} = V_{P_{i(e)}} \sqcup V_{P_{t(e)}} \sqcup \{w\},$$

gdzie w to 0-sympleks i niech

$$EP_{e^0} = EP_{i(e)} \sqcup EP_{t(e)} \sqcup \{e_i, e_t\},$$

gdzie $e_i = \{v_{p_i}, w\}$ i $e_t = \{v_{p_t}, w\}$. Ustalamy też orientację na krawędziach e_i i e_t poprzez: $i(e_i) = v_{p_i}$, $t(e_i) = w$, $i(e_t) = w$, $t(e_t) = v_{p_t}$. Zauważmy, że kompleksy $P_{i(e)}$ i $P_{t(e)}$ wkładają się w kompleks P_{e^0} w oczywisty sposób. Oznaczmy ich obrazy przez to włożenie przez $\widetilde{P_{i(e)}}$ i $\widetilde{P_{t(e)}}$. Dla $\beta_i, \beta_t \subset e^0$ określonych w poprzednim podrozdziale mamy $e_{\beta_i}^0 = i(e)$ i $e_{\beta_t}^0 = t(e)$, czyli $P_{e_{\beta_i}^0} = P_{i(e)}$ i $P_{e_{\beta_t}^0} = P_{t(e)}$. Przyjmijmy $P_{z_{\beta_i}} : P_{i(e)} \hookrightarrow P_{e^0}$ i $P_{z_{\beta_t}} : P_{t(e)} \hookrightarrow P_{e^0}$ jako wyżej wspomniane włożenia. Niech $\pi_{e^0} : P_{e^0} \rightarrow e^0$ będzie jedynym możliwym odwzorowaniem semi-barycentrycznym, dla którego $\pi_{e^0}(\widetilde{P_{i(e)}}) = \beta_i$, $\pi_{e^0}(\widetilde{P_{t(e)}}) = \beta_t$ oraz $\pi_{e^0}(w)$ jest barycentrum 1-sympleksu e^0 (ten warunek definiuje odwzorowanie π_{e^0} na wierzchołkach i po rozszerzeniu go afinicznie na krawędzie dostaniemy odwzorowanie semi-barycentryczne).

- Dla 1-sympleksu e^i odpowiadającego krawędzi $e = \{i(e), t(e)\} \in E_\Gamma$ rozważmy podobnie jak wcześniej kompleks $P_{i(e)} = \Gamma_{a(i(e))}^\#$, punkt $p_i \in \text{Lk}(i(e))$ odpowiadający krawędzi e i wierzchołek $v_{p_i} \in V_{\Gamma_{a(i(e))}^\#}$ odpowiadający punktowi $\alpha_{i(e)}(p_i)$. Definiujemy P_{e^i} przez jego wierzchołki i krawędzie. Niech

$$V_{P_{e^i}} = V_{P_{i(e)}} \sqcup \{w, u\},$$

gdzie w i u to 0-sympleksy i niech

$$EP_{e^i} = EP_{i(e)} \sqcup \{e_i, e_t\},$$

gdzie $e_i = \{v_{p_i}, w\}$ i $e_t = \{w, u\}$. Ustalamy też orientację na e_i i e_t , przez $i(e_i) = v_{p_i}$, $t(e_i) = w$, $i(e_t) = w$, $t(e_t) = u$. Dla 0-sympleksów $\beta_i, \beta_t \subset e^i$ mamy $e_{\beta_i}^i = i(e)$ i $e_{\beta_t}^i = \star$, czyli $P_{e_{\beta_i}^i} = P_{i(e)}$ i $P_{e_{\beta_t}^i} = P_\star$. Definiujemy $P_{z_{\beta_i}} : P_{i(e)} \hookrightarrow P_{e^i}$ jako naturalne włożenie i $P_{z_{\beta_t}} : P_\star \hookrightarrow P_{e^i}$ tak, że $P_{z_{\beta_t}}(\star) = u$. Niech $\pi_{e^i} : P_{e^i} \rightarrow e^i$ będzie jedynym odwzorowaniem semi-barycentrycznym, dla którego $\pi_{e^i}(\widetilde{P_{i(e)}}) = \beta_i$, gdzie $\widetilde{P_{i(e)}}$ to obraz $P_{i(e)}$ przez $P_{z_{\beta_i}}$ oraz $\pi_{e^i}(u) = \beta_t$ i $\pi_{e^i}(w)$ jest barycentrum 1-sympleksu e^i .

Analogicznie postępujemy dla 1-sympleksu e^t zamieniając w powyższej konstrukcji "i" na "t" i vice versa.

- Dla 1-sympleksu e^k , gdzie $k \in \{1, 2, \dots, n_\varepsilon\}$ i $\varepsilon = (i(e), t(e))$, rozważmy krawędź e' , gdzie $e' = |\varepsilon_k|$ i $\varepsilon_k \in A_\varepsilon$. Niech $\Gamma_{e'}^\#$ będzie zdefiniowanym w Definicji 3.3 pomocniczym kompleksem. Definiujemy P_{e^k} jako graf w zależności od orientacji ε_k . Niech

$$V_{P_{e^k}} = V_{\Gamma_{e'}^\#} \sqcup \{u_i, u_t\}$$

$$EP_{e^k} = E_{\Gamma_{e'}^\#} \sqcup \{e_i, e_t\},$$

gdzie $e_i = \{u_i, w_i\}$ i $e_t = \{w_t, u_t\}$, gdy $i(\varepsilon_k) = i(e')$ lub $e_i = \{u_i, w_t\}$ i $e_t = \{w_i, u_t\}$, gdy $i(\varepsilon_k) = t(e')$. Ustalamy standardową orientację krawędzi e_i i e_t w każdym z tych przypadków tak, że $i(e_i) = u_i$ oraz $t(e_t) = u_t$. Dla 0-sympleksów $\beta_i, \beta_t \subset e^k$ mamy $e_{\beta_i}^k = e_{\beta_t}^k = \star$. Wtedy $P_{e_{\beta_i}^k} = P_{e_{\beta_t}^k} = P_\star$. Niech $P_{z_{\beta_i}}(\star) = u_i$ i $P_{z_{\beta_t}}(\star) = u_t$. Zauważmy, że $\Gamma_{e'}^\#$ w oczywisty sposób wkłada się w P_{e^k} . Obraz $\Gamma_{e'}^\#$ w P_{e^k} przez to włożenie oznaczmy tak samo. Niech $\pi_{e^k} : P_{e^k} \rightarrow e^k$ będzie jedynym odwzorowaniem semi-barycentrycznym, które spełnia $\pi_{e^k}(\Gamma_{e'}^\#) = \{\text{bc}(e^k)\}$, gdzie $\text{bc}(e^k)$ to barycentrum 1-sympleksu e^k , $\pi_{e^k}(u_i) = \beta_i$ i $\pi_{e^k}(u_t) = \beta_t$.

Fakt 3.5. *Tak zdefiniowany układ $\mathcal{P} = (\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}, \{P_{z_\beta} : \beta \in B\})$ jest dobrą rodziną regul podmiary dla dobrej rodziny sympleksów $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$.*

Dowód. Łatwo zobaczyć, że zarówno kompleksy P_σ jak i odwzorowania π_σ zostały tak zdefiniowane, żeby odwzorowania π_σ były semi-barycentryczne. Odwzorowania P_{z_β} również celowo zostały zdefiniowane jako symplecjalne włożenia. Pozostaje sprawdzić warunki *ii*) oraz *iii*) z definicji 2.6 dobrej rodziny reguł podmiany, czyli:

ii) dla każdego $\sigma \in \Sigma$ i właściwej ściany $\beta \subset \sigma$ zachodzą równości

$$\pi_\sigma \circ P_{z_\beta} = z_\beta \circ \pi_{\sigma_\beta} \text{ oraz } \pi_\sigma^{-1}(\beta) = P_{z_\beta}(P_{\sigma_\beta}),$$

iii) Dla właściwych ścian $\beta \subset \sigma$ i $\alpha \subset \sigma_\beta$ zachodzi równość

$$P_{z_\beta} \circ P_{z_\alpha} = P_{z_{z_\beta(\alpha)}}.$$

Warunek *iii*) jest spełniony, ponieważ wszystkie kompleksy σ_β są wymiaru 0. Rozpatrzmy warunek *ii*)

- Dla 1-sympleksu e^0 i $\beta_i \subset e^0$ mamy $e_{\beta_i}^0 = i(e)$, czyli $\pi_{e^0} \circ P_{z_{\beta_i}} : P_{i(e)} \rightarrow e^0$ i

$$\pi_{e^0} \circ P_{z_{\beta_i}}(P_{i(e)}) = \pi_{e^0}(\widetilde{P_{i(e)}}) = \beta_i.$$

Z drugiej strony $z_{\beta_i} \circ \pi_{i(e)} : P_{i(e)} \rightarrow e^0$ i

$$z_{\beta_i} \circ \pi_{i(e)}(P_{i(e)}) = z_{\beta_i}(i(e)) = \beta_i.$$

Ponadto $\pi_{e^0}^{-1}(\beta_i) = \widetilde{P_{i(e)}} = P_{z_{\beta_i}}(P_{i(e)})$. Zatem warunek *ii*) jest w tym wypadku spełniony. Analogicznie sprawdzamy dla $\beta_t \subset e^0$.

- Dla 1-sympleksu e^i i $\beta_i, \beta_t \subset e^i$ mamy $e_{\beta_i}^i = i(e)$ i $e_{\beta_t}^i = \star$. Zatem mamy

– dla β_i : $\pi_{e^i} \circ P_{z_{\beta_i}} : P_{i(e)} \rightarrow e^i$ i

$$\pi_{e^i} \circ P_{z_{\beta_i}}(P_{i(e)}) = \pi_{e^i}(\widetilde{P_{i(e)}}) = \beta_i.$$

Z drugiej strony $z_{\beta_i} \circ \pi_{i(e)} : P_{i(e)} \rightarrow e^0$ i

$$z_{\beta_i} \circ \pi_{i(e)}(P_{i(e)}) = z_{\beta_i}(i(e)) = \beta_i.$$

Ponadto $\pi_{e^0}^{-1}(\beta_i) = \widetilde{P_{i(e)}} = P_{z_{\beta_i}}(P_{i(e)})$.

– dla β_t : $\pi_{e^i} \circ P_{z_{\beta_t}} : P_\star \rightarrow e^i$ i

$$\pi_{e^i} \circ P_{z_{\beta_t}}(P_\star) = \pi_{e^i}(u) = \beta_t.$$

Z drugiej strony $z_{\beta_t} \circ \pi_\star : P_\star \rightarrow e^0$ i

$$z_{\beta_t} \circ \pi_\star(P_\star) = z_{\beta_t}(\star) = \beta_t.$$

Ponadto $\pi_{e^0}^{-1}(\beta_t) = u = P_{z_{\beta_t}}(P_\star)$.

Zatem warunek *ii*) jest spełniony dla e^i . Analogicznie pokazujemy dla e^t .

- Dla 1-sympleksu e^k i dla $\beta_i \subset e^k$ mamy $e_{\beta_i}^k = \star$. Zatem mamy $\pi_{e^k} \circ P_{z_{\beta_i}} : P_\star \rightarrow e^k$ i

$$\pi_{e^k} \circ P_{z_{\beta_i}}(P_\star) = \pi_{e^k}(u_i) = \beta_i.$$

oraz $z_{\beta_i} \circ \pi_\star : P_\star \rightarrow e^k$ i

$$z_{\beta_i} \circ \pi_\star(P_\star) = z_{\beta_i}(\star) = \beta_i.$$

Ponadto $\pi_{e^k}^{-1}(\beta_i) = u_i = P_{z_{\beta_i}}(P_\star)$.

Analogicznie pokazujemy dla $\beta_t \subset e^k$.

Sprawdziliśmy wszystkie przypadki. □

3.3 Etykietowanie

Rozważamy zdefiniowane wcześniej: dobrą rodzinę sympleksów $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_\beta : \beta \in B\})$ oraz dobrą rodzinę reguł podmiiany $\mathcal{P} = (\{(P_\sigma, \pi_\sigma) : \sigma \in \Sigma\}, \{P_{z_\beta} : \beta \in B\})$ dla \mathcal{D} . Zdefiniujemy \mathcal{D} -etykietowanie $\Lambda_{\mathcal{P}} = (\lambda_{\mathcal{P}}, \{u_\tau^{\mathcal{P}} : \tau \in \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} P_\sigma\})$ rodziny \mathcal{P} . Odwzorowania $u_\tau^{\mathcal{P}} : \tau \rightarrow \lambda_{\mathcal{P}}(\tau)$ zdefiniujemy w jedyny możliwy sposób dla 0-wymiarowych τ . Dla 1-sympleksów τ mamy określone wierzchołki $i(\tau)$ i $t(\tau)$. Każde $u_\tau^{\mathcal{P}}$ zdefiniujemy jako jedyny możliwy izomorfizm symplecjalny spełniający $u_\tau^{\mathcal{P}}(i(\tau)) = \beta_i$ (wtedy $u_\tau^{\mathcal{P}}(t(\tau)) = \beta_t$). Opiszemy zatem dokładniej jedynie samo etykietowanie $\lambda_{\mathcal{P}}$.

- Dla 0-sympleksu \star mamy $P_\star = \star$. Definiujemy $\lambda(\star) = \star$.
- Dla 0-sympleksu $v \in \Sigma$, odpowiadającego wierzchołkowi $v \in V_\Gamma$ mamy $P_v = \Gamma_{a(v)}^\#$. Korzystając z oznaczeń z Definicji 3.3, definiujemy dla dowolnego $\tau \in V_{P_v}$:

$$\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{gdy } \tau \in V^{\text{int}}(\Gamma_{a(v)}^\#) \\ \star & \text{gdy } \tau \in V^{\text{bd}}(\Gamma_{a(v)}^\#) \end{cases}$$

oraz dla dowolnego $\tau \in E_{P_v}$:

$$\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \begin{cases} \tau^0 & \text{gdy } \tau \in E^{\text{int}}(\Gamma_{a(v)}^\#) \\ \tilde{\tau}^i & \text{gdy } \tau \in E^i(\Gamma_{a(v)}^\#) \\ \tilde{\tau}^t & \text{gdy } \tau \in E^t(\Gamma_{a(v)}^\#) \end{cases}$$

gdzie $\tilde{\tau}$ to przypisany do τ tak jak w Definicji 3.3 1-sympleks z grafu Γ .

- Dla 1-sympleksu $e^0 \in \Sigma$ odpowiadającego krawędzi $e \in E_\Gamma$ rozważamy kompleks P_{e^0} . W P_{e^0} mamy następujące rodzaje wierzchołków i krawędzi:
 - pochodzące od włożonych kompleksów $P_{i(e)}$ i $P_{t(e)}$ wierzchołki $V^{\text{int}}(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$ i $V^{\text{int}}(\Gamma_{a(t(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tau$,
 - pochodzące od włożonych kompleksów $P_{i(e)}$ i $P_{t(e)}$ wierzchołki $V^{\text{bd}}(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$ i $V^{\text{bd}}(\Gamma_{a(t(e))}^\#)$ oraz wierzchołek w , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \star$,
 - pochodzące od włożonych kompleksów $P_{i(e)}$ i $P_{t(e)}$ krawędzie $E^{\text{int}}(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$ i $E^{\text{int}}(\Gamma_{a(t(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tau^0$,
 - pochodzące od włożonych kompleksów $P_{i(e)}$ i $P_{t(e)}$ krawędzie $E^i(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$ i $E^i(\Gamma_{a(t(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tilde{\tau}^i$ oraz krawędzie $E^t(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$ i $E^t(\Gamma_{a(t(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tilde{\tau}^t$,
 - krawędzie e_i, e_t , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(e_i) = \lambda_{\mathcal{P}}(e_t) = e^1$.
- Dla 1-sympleksu $e^i \in \Sigma$ odpowiadającego krawędzi $e \in E_\Gamma$ rozważamy kompleks P_{e^i} , w którym mamy następujące rodzaje wierzchołków i krawędzi:
 - pochodzące od włożonego kompleksu $P_{i(e)}$ wierzchołki $V^{\text{int}}(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tau$,
 - pochodzące od włożonego kompleksu $P_{i(e)}$ wierzchołki $V^{\text{bd}}(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$ oraz wierzchołki w i u , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \star$,
 - pochodzące od włożonego kompleksu $P_{i(e)}$ krawędzie $E^{\text{int}}(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tau^0$,

- pochodzące od włożonego kompleksu $P_{i(e)}$ krawędzie $E^i(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tilde{\tau}^i$ oraz krawędzie $E^t(\Gamma_{a(i(e))}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tilde{\tau}^t$,
- krawędzie e_i, e_t , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(e_i) = \lambda_{\mathcal{P}}(e_t) = e^1$,

Analogicznie definiujemy etykietowanie $\lambda_{\mathcal{P}}$ dla sympleksów z P_{e^t} zamieniając powyżej "i", na "t" i odwrotnie.

- Dla 1-sympleksów $e^k \in \Sigma$ odpowiadających krawędzi $e \in E_{\Gamma}$ ze standardową orientacją ε , gdzie $k \in \{1, \dots, n_{\varepsilon}\}$ i $|\varepsilon| = e$ oraz dla $e' = |\varepsilon_k|$ rozważamy kompleks P_{e^k} , w którym mamy następujące rodzaje wierzchołków i krawędzi:
 - pochodzące od włożonego kompleksu $\Gamma_{e'}^\#$ wierzchołki wewnętrzne $V^{\text{int}}(\Gamma_{e'}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tau$,
 - pochodzące od włożonego kompleksu $\Gamma_{e'}^\#$ wierzchołki brzegowe v_i, v_t oraz wierzchołki u_i, u_t , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \star$,
 - pochodzące od włożonego kompleksu $\Gamma_{e'}^\#$ krawędzie wewnętrzne $E^{\text{int}}(\Gamma_{e'}^\#)$, dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(\tau) = \tau^0$,
 - pochodzące od włożonego kompleksu $\Gamma_{e'}^\#$ krawędzie e'_i, e'_t oznaczone zgodnie z definicją kompleksu P_{e^k} , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(e'_i) = (e')^i$ i $\lambda_{\mathcal{P}}(e'_t) = (e')^t$,
 - krawędzie e_i, e_t , dla których definiujemy $\lambda_{\mathcal{P}}(e_i) = \lambda_{\mathcal{P}}(e_t) = e^{k'}$, gdzie $k' = k+1$, gdy $k < n_{\varepsilon}$ lub $k' = 1$, gdy $k = n_{\varepsilon}$.

Fakt 3.6. *Tak zdefiniowany układ $(\lambda_{\mathcal{P}}, \{u_{\tau}^{\mathcal{P}} : \tau \in \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} P_{\sigma}\})$ jest \mathcal{D} -etykietowaniem dobrej rodziny reguł podmiany \mathcal{P} .*

Dowód tego faktu to bezpośrednia weryfikacja definicji, podobnie jak dowód Faktu 3.5. W tym przypadku jest ona żmudniejsza i dlatego ją pominiemy.

3.4 Początek i koniec konstrukcji

Pozostał nam jeszcze jeden element konstrukcji, a mianowicie sam jej początek, czyli wyznaczenie kompleksu X_0 oraz jego \mathcal{D} -etykietowania Λ_0 , gdzie $\mathcal{D} = (\Sigma, \{z_{\beta} : \beta \in B\})$ jest zdefiniowaną wcześniej dobrą rodziną sympleksów. Za X_0 możemy przyjąć dowolną komponentę grafu Γ . Dla ustalenia uwagi niech to będzie Γ_1 . Każdy z wierzchołków $v \in V_{\Gamma_1}$ etykietujemy jego kopią $v \in \Sigma$, czyli $\lambda_0(v) = v$. Każdą krawędź $e \in E_{\Gamma_1}$ etykietujemy odpowiadającym jej 1-sympleksem $e^0 \in \Sigma$, czyli $\lambda_0(e) = e^0$. Dla każdego $v \in V_{\Gamma_1}$ i $e \in E_{\Gamma_1}$ definiujemy $u_v^0 = \text{id}_v$, a odwzorowania u_e^0 definiujemy jako jedyne izomorfizmy symplecjalne spełniające $u_e^0(i(e)) = \beta_i$. Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowana para $\Lambda_0 = (\lambda_0, \{u_{\sigma}^0 : \sigma \in X_0\})$ jest \mathcal{D} -etykietowaniem kompleksu X_0 .

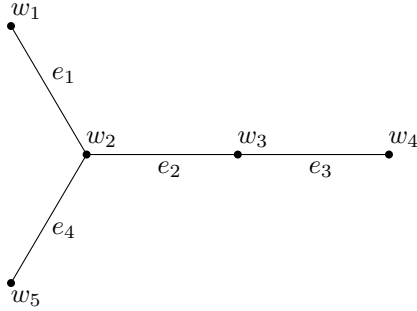
Zdefiniowaliśmy w tym rozdziale następujące obiekty: kompleks symplecjalny X_0 , dobrą rodzinę sympleksów \mathcal{D} , dobrą rodzinę reguł podmiany \mathcal{P} , \mathcal{D} -etykietowanie Λ_0 kompleksu X_0 oraz \mathcal{D} -etykietowanie $\Lambda_{\mathcal{P}}$ rodziny \mathcal{P} . Możemy zatem zdefiniować tak jak w Rozdziale 2 ciąg odwrotny $\mathcal{I}(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \Lambda_0, \Lambda_{\mathcal{P}})$, czyli konstruktywny układ Markowa, który oznaczymy przez $\mathcal{I}(\mathcal{R})$. Jego granicę, czyli związany z nim konstruktywny kompakt Markowa oznaczymy $\mathcal{M}(\mathcal{R})$, gdzie \mathcal{R} to przyjęty przez nas na samym początku grafowy układ łączący.

3.5 Komentarz o konstrukcji

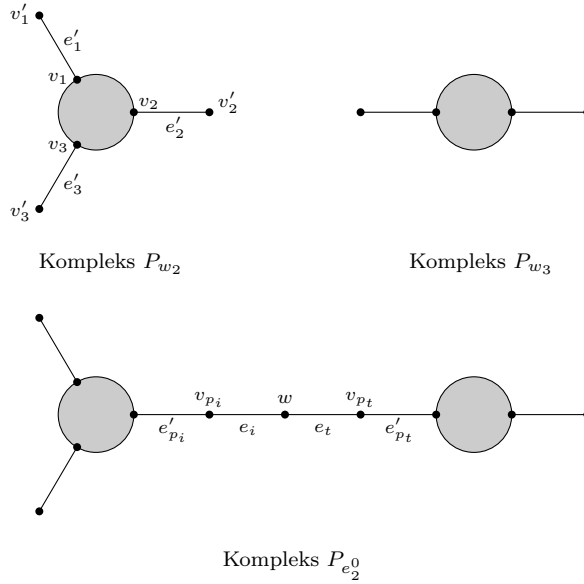
Idea konstrukcji jest dość prosta— chcemy naśladować konstrukcję regularnego drzewa grafów, która polega na wykonywaniu nieskończenie wielu sum spójnych grafów. Sumę spójną grafów nieformalnie

będziemy określać przyklejaniem jednego grafu do drugiego. Konstrukcja poprzez konstruktywny układ Markowa polega na tworzeniu coraz większego grafu właśnie poprzez przyklejanie w każdym kroku do odpowiednich wierzchołków i krawędzi po jednym grafie na raz. Cały techniczny arsenał służy tylko temu, by zapewnić warunki bycia jednocześnie kompaktem Markowa i regularnym drzewem grafów. Nasza konstrukcja przebiega następująco. W $(j + 1)$ -ym kroku w skończonym do tej pory kompleksie X_j mamy sympleksy, które odpowiadają leżącemu w tle kompleksowi X_{j-1} oraz sympleksy pochodzące z właśnie doklejonych grafów. Nowe grafy przyklejamy do tych wierzchołków, które są w świeżo przyklejonych częściach i do tych krawędzi, które pochodzą od kompleksu X_{j-1} . Pozostałe wierzchołki są jedynie efektem poprzednich sklejań lub służą podzieleniu sympleksów na mniejsze części tak, by odwzorowania f_j mogły być semi-barycentryczne, dlatego są etykietowane martwym wierzchołkiem \star i do końca konstrukcji nic się w nich nie dzieje. Więcej dzieje się natomiast w przypadku krawędzi. Każda krawędź doklejanego grafu jest bez zmian dołączana do kompleksu, bądź bierze bezpośredni udział w doklejanym grafie, to znaczy zostaje zmodyfikowana i tworzy krawędź bądź krawędzie, które łączą nowy graf ze skończonym do tej pory kompleksem. W zależności od tego powstałe z niej krawędzie są indeksowane przez krawędź o górnym indeksie 0 , i , lub t . Etykiety te świadczą o tym, że nie będziemy do nich jeszcze przyklejać nowych grafów, lecz przypisane im kompleksy z reguły podmiany, które służą nam do poprawnego i zorganizowanego przyklejania grafów do wierzchołków tych krawędzi. Mamy też stare krawędzie, to znaczy takie, które powstały z krawędzi kompleksu X_{j-1} . Ich etykiety noszą ślad krawędzi, do której jako pierwszej zaczęliśmy doklejać nowe grafy, zaraz po jej pojawieniu się w konstrukcji. Do takiej krawędzi e przypisany jest ponumerowany ciąg $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_e}$ odpowiadających jej krawędzi zorientowanych zadanych przez zbiór \mathcal{A} . Zgodnie z tą numeracją przyklejamy kolejno w każdym kroku nowe grafy do tych starych krawędzi. Podsumowując, jeśli wierzchołek pojawia się jako wierzchołek wewnętrzny przyklejanego grafu, to ma etykietę, która jest jego kopią i w następnym kroku przyklejamy w jego miejsce odpowiadający mu poprzez involucję a graf; jeśli jest wierzchołkiem na krawędzi sklejana bądź jest w starej części kompleksu do którego coś przyklejamy to ma etykietę \star i pozostanie takim wierzchołkiem do końca konstrukcji; jeśli krawędź jest krawędzią wewnętrzną doklejanego grafu to ma etykietę typu e^0 i w następnym kroku w jej miejsce wstawiamy kompleks pozwalający na przyklejenie grafów do wierzchołków tej krawędzi; jeśli jest na krawędzi sklejana w doklejanym grafie, to ma etykietę typu e^i lub e^t i w następnym kroku też wstawiamy w jej miejsce kompleks pozwalający przykleić nowy graf do tego jego wierzchołka, który jest wewnętrznym wierzchołkiem przyklejonego w tym kroku grafu; jeśli krawędź jest w "starej" części kompleksu to ma etykietę typu e^k i w jej barycentrum w odpowiedni sposób wkładamy nowy graf zgodnie z indeksem k . Zobaczmy jeszcze na konkretnym prostym przykładzie, jak przebiega pierwszy krok konstrukcji.

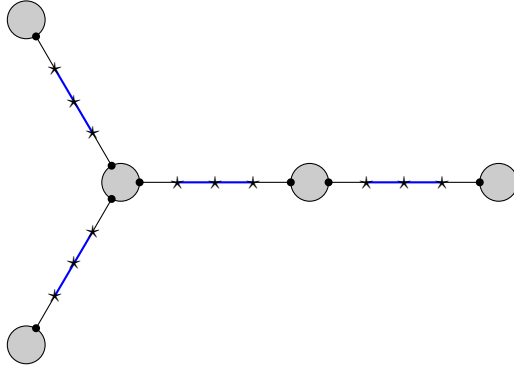
Przykład 3.7. Niech X_0 , czyli jedna z komponent grafu Γ będzie taka jak na rysunku poniżej:



Rozważmy krawędź e_2 i jej wierzchołki w_2, w_3 . Odpowiadają im kompleksy $P_{\lambda_0(e_2)} = P_{e_2^0}$, $P_{\lambda_0(w_2)} = P_{w_2}$ i $P_{\lambda_0(w_3)} = P_{w_3}$, które przedstawimy symbolicznie:



W każdym kompleksie szare koło oznacza tę część kompleksu $P_{\lambda(\sigma)}$, która nie bierze bezpośredniego udziału w przyklejaniu. Znajdują się tam wierzchołki i krawędzie, które określiliśmy jako wewnętrzne w definicji 3.3 pomocniczych kompleksów. W kompleksach P_{w_2} i $P_{e_2^0}$ wyróżniliśmy te sympleksy, które były wyróżnione w ich definicji w podrozdziale 3.2 i oznaczyliśmy je dokładnie tak samo jak tam. Widać teraz gołym okiem jak kompleksy odpowiadające wierzchołkom w_2, w_3 krawędzi e_2 wkładają się w kompleks P_{e_2} (v_{p_i} jest wtedy równy któremuś z v'_j i wtedy $e'_{p_i} = e'_j$). Przy analogicznym przedstawieniu kompleksów $P_{\lambda(\sigma)}$ dla pozostałych $\sigma \subset X_0$ kompleks X_1 powstający jako odpowiedni \mathcal{B} -iloraz jak w deifnycji konstruktywnego układu Markowa wygląda tak.



Gwiazdkami oznaczyliśmy martwe wierzchołki, a na niebiesko te krawędzie, które są w części kompleksu X_1 , do której odnosiliśmy się jako do starej lub pochodzącej od kompleksu X_{j-1} , czyli w tym wypadku X_0 . Niebieskie krawędzie powinny mieć etykietę typu e^1 , te których jeden wierzchołek jest oznaczony kropką, a drugi gwiazdką etykietę typu e^i lub e^t , a te, które są wewnątrz doklejonnych grafów– czyli kryją się za szarymi kołami– etykietę typu e^0 .

4 Dowód zasadniczego twierdzenia

W tym rozdziale pokażemy, że dla dowolnego grafowego układu łączącego \mathcal{R} , skonstruowany w rozdziale poprzednim konstruktywny kompakt Markowa $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ związany z \mathcal{R} jest homeomorficzny z regularnym drzewem grafów $\mathcal{X}(\mathcal{R})$. W tym celu rozważymy zgodny z \mathcal{R} układ drzewiasty Θ i związany z nim standardowy system odwrotny \mathcal{S}_Θ . System ten jest zdefiniowany nad częściowo uporządkowanym zbiorem \mathcal{F}_T^c skończonych c -poddzew drzewa T . Znajdziemy w tym zbiorze łańcuch $F_0 \subset F_1 \subset \dots$ i zadany przez niego ciąg odwrotny

$$\mathcal{S}'_\Theta = (\{K_{F_n}^*\}_n, \{f_{F_j F_k} : 0 \leq j \leq k \in \mathbb{N}\},$$

który po pierwsze daje taką samą granicę odwrotną, to znaczy $\varprojlim \mathcal{S}'_\Theta = \varprojlim \mathcal{S}_\Theta$, a po drugie jest izomorficzny z ciągiem odwrotnym $\mathcal{I}(\mathcal{R})$, czyli z konstruktywnym układem Markowa dla \mathcal{R} zdefiniowanym w poprzednim rozdziale.

Ustalmy dowolny grafowy układ łączący $\mathcal{R} = (\Gamma, \mathbf{a}, \mathcal{A})$, w którym $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^N \Gamma_j$ oraz dowolny zgodny z nim układ drzewiasty $\Theta(\mathcal{R}) = (T, \{K_c\}, \{\Sigma_b\}, \{\varphi_e\})$. Niech $\mathcal{I}(\mathcal{R}) = \mathcal{I}(X_0, \mathcal{D}, \mathcal{P}, \Lambda_0, \Lambda_{\mathcal{P}})$ będzie zdefiniowanym dla \mathcal{R} tak, jak w poprzednim rozdziale konstruktywnym układem Markowa, zadającym konstruktywny kompakt Markowa $\mathcal{M}(\mathcal{R})$. W szczególności mamy ustaloną dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$ jej standardową orientację ε oraz pewną numerację zbioru $A_\varepsilon = \{\varepsilon' \in \mathcal{E}_\Gamma : (\varepsilon, \varepsilon') \in \mathcal{A}\} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_\varepsilon}\}$. Będziemy używać tych oznaczeń w całym tym rozdziale. Rozpocznijmy od udowodnienia zasadniczego lematu, stanowiącego większość dowodu głównego twierdzenia.

Lemat 4.1.

W częściowo uporządkowanym zbiorze \mathcal{F}_T^c istnieje kofinalny łańcuch $F_0 \subset F_1 \subset \dots$ (czyli taki, że dla każdego $F \in \mathcal{F}_T^c$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ taki, że $F \subset F_n$), który zadaje ciąg odwrotny

$$\mathcal{S}'_\Theta = (\{K_{F_n}^*\}_n, \{f_{F_j F_k} : 0 \leq j \leq k \in \mathbb{N}\})$$

izomorficzny z ciągiem odwrotnym $\mathcal{I}(\mathcal{R})$, gdzie $K_{F_n}^*$ to zredukowana suma częściowa układu Θ , a odwzorowania $f_{F_j F_k}$ pochodzą ze standardowego ciągu odwrotnego związanego z Θ .

Ciąg odwrotny $\mathcal{I}(\mathcal{R})$ przedstawimy za pomocą diagramu:

$$X_0 \xleftarrow{f_1} X_1 \xleftarrow{f_2} \dots \xleftarrow{f_j} X_j \xleftarrow{f_{j+1}} X_{j+1} \xleftarrow{f_{j+2}} \dots$$

Wtedy odwzorowania $f_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ są zadane jako złożenia

$$f_{ij} = f_{i+1} \circ f_{i+2} \circ \dots \circ f_{j-1} \circ f_j$$

Przypomnijmy, że każdy z kompleksów X_n ma \mathcal{D} -etykietowanie Λ_n określone dla $n = 0$ wprost i dla $n > 0$ jako odpowiednio indukowane przez etykietowanie $\Lambda_{\mathcal{P}}$.

4.1 Rodzina pomocniczych homeomorfizmów

Naszym celem będzie znalezienie ciągu sum częściowych $K_{F_n}^*$ układu Θ , które skrótowo oznaczać będziemy $K_n^* := K_{F_n}^*$ oraz homeomorfizmów $h_n : K_n^* \rightarrow X_n$. Homeomorfizmy h_n wyznaczać będziemy rekurencyjnie, dbając o to, by przyporządkowywały sobie punkty, w których zachodzą odpowiadające sobie sumy spójne grafów. W tym celu wyróżnimy najpierw odpowiednie rodziny punktów zawartych w przestrzeniach X_n .

Weźmy dowolny $n > 0$ i rozważmy kompleks X_n oraz jego dowolny 1-sympleks $\sigma \subset X_n$ taki, że $\lambda_n(\sigma) = e^0$ dla pewnej krawędzi $e \in \Gamma$. Przekonamy się, że kolejne sumy spójne, wykonane wzdłuż sympleksu σ zachodzą w punktach, które odpowiadają wierzchołkom kolejnych podrozbić barycentrycznych 1-sympleksu σ poza samym barycentrum σ . Dla dowolnego 1-sympleksu τ oznaczmy przez $\text{Bar}(\tau)$ zbiór punktów odpowiadających wierzchołkom wszystkich podrozbić barycentrycznych τ poza wierzchołkami samego sympleksu τ oraz przez $\text{bc}(\tau)$ barycentrum sympleksu τ . Zbadajmy przeciwobrazy przez odwzorowania $\{f_{nm}\}_{m>n}$ punktów $x \in \text{Bar}(\sigma)$. Rozważmy odwzorowanie $f_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$. Jest ono indukowane przez odwzorowania $\{f_\tau : \tau \subset X_n\}$, gdzie τ to sympleks w X_n , a $f_\tau : P_{\lambda_n(\tau)} \rightarrow \tau$ jest zadane przez złożenie $f_\tau = (u_\tau^{\mathcal{P}})^{-1} \circ \pi_{\lambda_n(\tau)}$ (patrz Podrozdział 2.1). W szczególności przeciwobraz $f_{n+1}^{-1}(\sigma)$ jest wyznaczony przez odwzorowanie $f_\sigma : P_{e^0} \rightarrow \sigma$ (po utożsamieniu P_{e^0} z jego obrazem przez odwzorowanie ilorazowe $\pi : \bigsqcup_{\tau \subset X_n} P_{\lambda_n(\tau)} \rightarrow X_{n+1}$). Skoro $u_\sigma^{\mathcal{P}}$ jest izomorfizmem sympleksów, to tak naprawdę wystarczy rozważyć odwzorowanie $\pi_{e^0} : P_{e^0} \rightarrow e^0$. Jest to jedyne odwzorowanie semi-barycentryczne (w szczególności zadane na wierzchołkach rozszerza się liniowo), spełniające warunki: $\pi_{e^0}(P_{i(e)}) = \beta_i$, $\pi_{e^0}(P_{t(e)}) = \beta_t$ oraz $\pi_{e^0}(w)$ jest barycentrum 1-sympleksu e^0 (oznaczenia pochodzą z podrozdziału 3.2). Włożone w P_{e^0} kompleksy $P_{i(e)}$, $P_{t(e)}$ odwzorowują się w wierzchołki sympleksu e^0 , zatem przeciwobraz $\text{Bar}(\sigma)$ zawiera się w podkompleksie zbudowanym z krawędzi e_i i e_t . Krawędzie te są przez π_{e^0} odwzorowywane izomorficznie na odpowiednie 1-sympleksy w barycentrycznym podrozbiciu e^0 . Mamy zatem

$$f_{n+1}^{-1}(\text{Bar}(\sigma)) = f_\sigma^{-1}(\text{Bar}(\sigma)) = \pi_{e^0}^{-1}(\text{Bar}(e^0)) = \text{Bar}(e_i) \cup \text{Bar}(e_t) \cup \{w\}.$$

Teraz rozważmy odwzorowanie $f_{n(n+2)} : X_{n+2} \rightarrow X_n$. Z definicji ciągu odwrotnego mamy

$$f_{n(n+2)} = f_{n+1} \circ f_{n+2}.$$

Stąd przeciwobraz

$$f_{n(n+2)}^{-1}(\text{Bar}(\sigma)) = f_{n+2}^{-1}(f_{n+1}^{-1}(\text{Bar}(\sigma))) = f_{n+2}^{-1}(\text{Bar}(e_i) \cup \text{Bar}(e_t) \cup \{w\})$$

Kompleks P_{e^0} w kanoniczny sposób wkłada się w X_{n+1} , zatem e_i , e_t i w możemy traktować jak sympleksy X_{n+1} . Odwzorowanie f_{n+2} sprowadzamy tak jak f_{n+1} powyżej do reguł podmiany i zamiast

e_i, e_t i w badamy ich etykiety e^1 i \star oraz odwzorowania $\pi_{e^1} : P_{e^1} \rightarrow e^1$ i $\pi_\star : P_\star = \star \rightarrow \star$. Sytuacja dla wierzchołka w stała się jasna: $f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(w) = \star$ i łatwo zobaczyć, że teraz dla każdego $k > 1$ mamy $f_{(n+1)(n+k)}^{-1}(w) = \star$, a zatem mamy $f_{n(n+k)}^{-1}(\text{bc}(\sigma)) = \star$ (nadal dla każdego $k > 1$). Innymi słowy w barycentrum σ nie zachodzi żadna suma spójna. Wróćmy teraz do odwzorowania $\pi_{e^1} : P_{e^1} \rightarrow e^1$. Kompleks P_{e^1} składa się z włożonego grafu $\Gamma_{e'}^\#$, gdzie e' jest oznaczoną tak jak w definicji dobrej rodziny reguł podmiiany krawędzią, odpowiadającą e za pośrednictwem ich orientacji i zbioru E -połączeń \mathcal{A} (to znaczy dla standardowej orientacji ε krawędzi e oraz dla $\varepsilon_1 \in A_\varepsilon$ mamy $e' = |\varepsilon_1|$) oraz z dwóch dodatkowych 1-sympleksów e_i, e_t , które dla odróżnienia oznaczymy ρ_i i ρ_t odpowiednio. Wierzchołki u_i i u_t jak można się już domyślić nie będą mieć znaczenia (odwzorowują się w omówione już punkty w sympleksie σ). Odwzorowanie $\pi_{e^1} : P_{e^1} \rightarrow e^1$ jest semi-barycentryczne i spełnia $\pi_{e^1}(\Gamma_{e'}^\#) = \{\text{bc}(e^1)\}$, $\pi_{e^1}(u_i) = \beta_i$ i $\pi_{e^1}(u_t) = \beta_t$. Zatem podobnie jak wcześniej mamy

$$f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(\text{Bar}(e_i)) = \pi_{e^1}^{-1}(\text{Bar}(e^1)) = \text{Bar}(\rho_i) \cup \text{Bar}(\rho_t) \cup \Gamma_{e'}^\#$$

oraz

$$f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(\text{Bar}(e_t)) = \pi_{e^1}^{-1}(\text{Bar}(e^1)) = \text{Bar}(\rho_i) \cup \text{Bar}(\rho_t) \cup \Gamma_{e'}^\#,$$

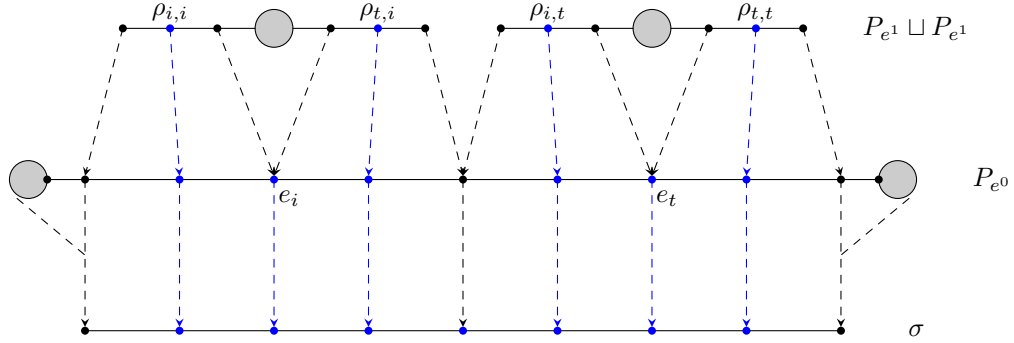
przy czym zbiory te są rozłączne— ich elementy to różne kopie elementów P_{e^1} . Rozróżnimy tylko jeszcze:

- $\rho_{i,i} := \rho_i \subset f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(e_i)$,
- $\rho_{t,i} := \rho_t \subset f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(e_i)$,
- $\rho_{i,t} := \rho_i \subset f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(e_t)$,
- $\rho_{t,t} := \rho_t \subset f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(e_t)$,
- $\Gamma_{e',i}^\# := \Gamma_{e'}^\# \subset f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(e_i)$,
- $\Gamma_{e',t}^\# := \Gamma_{e'}^\# \subset f_{(n+1)(n+2)}^{-1}(e_t)$.

Wtedy mamy

$$f_{n(n+2)}^{-1}(\text{Bar}(\sigma)) = \text{Bar}(\rho_{i,i}) \cup \text{Bar}(\rho_{t,i}) \cup \text{Bar}(\rho_{i,t}) \cup \text{Bar}(\rho_{t,t}) \cup \Gamma_{e',i}^\# \cup \Gamma_{e',t}^\# \cup \star$$

W szczególności zauważmy, że \star odwzorowuje się w barycentrum σ , a $\Gamma_{e',i}^\#$ i $\Gamma_{e',t}^\#$ w wierzchołki drugiego podrozbicia barycentrycznego (różne od wierzchołków σ i jego barycentrum). Poniżej schematyczny rysunek, który obrazuje jak działają odwzorowania f_{n+1} i f_{n+2} po odpowiednich utożsamieniach opisanych wyżej. Na niebiesko zaznaczono wybrane punkty odpowiadające wierzchołkom podrozbic barycentrycznych sympleksów, w których te punkty się znajdują.



Wstawiając teraz za 1 w indeksie e^1 dowolną liczbę ze zbioru $\{1, \dots, n_\varepsilon\}$ przeprowadzamy analogiczne rozumowanie, by pokazać, że operacje sumy spójnej jakie dokonają się na krawędzi σ są przeprowadzone w wierzchołkach kolejnych podrozbić barycentrycznych oraz w każdym punkcie $x \in \text{Bar}(\sigma) \setminus \{\text{bc}(\sigma)\}$ w końcu zostanie przeprowadzona taka operacja. Mówiąc dokładniej, dla każdego punktu $x \in \sigma$:

- jego przeciwobraz przez odwzorowanie f_{nm} jest jednopunktowy dla każdego $m > n$, gdy x nie jest wierzchołkiem σ i punktem z $\text{Bar}(\sigma) \setminus \{\text{bc}(\sigma)\}$ lub
- istnieje m takie, że przeciwobraz tego punktu przez f_{nm} jest włożonym w X_m grafem $\Gamma_{a(x)}^\#$, gdy x jest wierzchołkiem σ (wtedy $m = n + 1$) lub włożonym w X_m grafem $\Gamma_e^\#$ dla pewnej $e \in E_\Gamma$. Odpowiada to przeprowadzeniu sumy spójnej w punkcie x z komponentą Γ zawierającą wierzchołek $a(x)$ czy krawędź e . W każdym przypadku m jest najmniejszą liczbą, dla której przeciwobraz x przez f_{nm} nie jest jednopunktowy.

Możemy zatem każdemu punktowi $x \in \text{Bar}(\sigma) \setminus \{\text{bc}(\sigma)\}$ jednoznacznie przyporządkować etykietę $A(x)$ ze zbioru A_ε świadcząca o tym jaka komponenta grafu Γ i w jaki sposób została w danym punkcie przyłączona do całego kompleksu, a dokładniej jeśli x jest barycentrum sympleksu w k -tym podrozbiciu barycentrycznym σ , to $A(x) = \varepsilon_{k'}$, gdzie $k' = ((k - 1) \bmod n_\varepsilon) + 1$. Oznaczmy

$$\text{Bar}_{\varepsilon'}(\sigma) = \{x \in \text{Bar}(\sigma) : A(x) = \varepsilon'\}$$

gdzie $\varepsilon' \in A_\varepsilon$. Zauważmy jeszcze, że z własności tranzytywności w Definicji 2.16 każda krawędź $e \in E_\Gamma$ pojawi się w kompleksie X_n dla pewnego n jako etykieta e^0 . Możemy pominąć 1-sympleks σ i od razu pokazać to co wyżej dla e tak, jakby była ona 1-sympleksem w X_n poprzez utożsamienie e z e^0 i e^0 z σ . Użyjemy wtedy analogicznego oznaczenia $\text{Bar}_{\varepsilon'}(e)$. Zauważmy, że dla każdego $\varepsilon' \in A_\varepsilon$ zbiór $\text{Bar}_{\varepsilon'}(e)$ jest przeliczalny i gęsty w e .

Podobne rozumowanie możemy przeprowadzić dla sympleksu $\sigma \subset X_n$, którego etykieta $\lambda_n(\sigma)$ jest równa e^i , e^t , czy e^k dla pewnego $0 \neq k \in \mathbb{N}$ i $e \in E_\Gamma$. W przypadku e^i i e^t dostaniemy taką samą informację, że poza wierzchołkami σ sumy spójne zachodzą w punktach ze zbioru $\text{Bar}(\sigma) \setminus \text{bc}(\sigma)$, różnica jest tylko taka, że suma spójna zajdzie tylko w jednym z wierzchołków σ . Natomiast w przypadku e^k sumy spójne zachodzą we wszystkich punktach z $\text{Bar}(\sigma)$, ale nie zachodzą w wierzchołkach σ .

Definicja 4.2. Każdemu punktowi $x \in X_n$ przypiszemy etykietę

$$l_n(x) \in \{\star\} \cup V_\Gamma \cup \mathcal{E}$$

która będzie świadczyć o tym, czy i jaka suma spójna zachodzi w tym punkcie.

- Jeśli x jest wierzchołkiem X_n to definiujemy $l_n(x) = \lambda_n(x)$, gdy $\lambda_n(x) = \star$ i wtedy w x nie zachodzi suma spójna. Gdy $\lambda_n(x) = v$ dla pewnego $v \in V_\Gamma$, to w x zachodzi suma spójna z $\Gamma_{j(a(v))}$ i definiujemy $l_n(x) = a(v)$.
- Jeśli x nie jest wierzchołkiem X_n oraz nie należy do zbioru $\text{Bar}(\sigma)$ dla żadnego 1-sympleksu $\sigma \subset X_n$, to definiujemy $l_n(x) = \star$. Podobnie definiujemy $l_n(x) = \star$ dla $x = \text{bc}(\sigma)$, gdy $\lambda_n(\sigma)$ jest równe e^0 , e^i lub e^t dla pewnego $e \in E_\Gamma$. W takich punktach x nie zachodzą sumy spójne.
- Jeśli $x \in \text{Bar}(\sigma) \setminus \{\text{bc}(\sigma)\}$ i $\lambda_n(\sigma)$ jest równe e^0 , e^i lub e^t dla pewnego $e \in E_\Gamma$, to definiujemy $l_n(x) = A(x)$, gdzie $A(x)$ definiujemy tak jak powyżej, również w przypadku gdy $\lambda_n(\sigma)$ jest równe e^i lub e^t . Wtedy w x zachodzi suma spójna z $\Gamma_{j(|A(x)|)}$
- Jeśli $x \in \text{Bar}(\sigma)$ i $\lambda_n(\sigma) = e^k$ dla pewnego $e \in E_\Gamma$ i $1 \leq k \leq n_\varepsilon$, gdzie ε jest standardową orientacją e , to definiujemy $l_n(x)$ podobnie jak $A(x)$ wyżej. Jeśli x jest barycentrum j -ego podrozbięcia barycentrycznego σ , to definiujemy $l_n(x) = \varepsilon_{j'}$, gdzie $j' = ((k + j - 1) \bmod n_\varepsilon) + 1$ oraz $l_n(x) = \varepsilon_k$, gdy x jest barycentrum σ . Wtedy w x zachodzi suma spójna z $\Gamma_{j(|l_n(x)|)}$.

Wykorzystamy te informacje wprowadzając teraz kluczowe narzędzie. Dla każdego czarnego wierzchołka $c \in V_T^c$ z warunku (2) Definicji 2.17 mamy $K_c \cong \Gamma_{j(c)}^\circ$ dla pewnego $j(c) \in 1, \dots, N$. Wtedy z warunku (4.a) Definicji 2.17 dla każdego $v \in V_{\Gamma_{j(c)}}$ istnieje biały wierzchołek $b \in N_c$ taki, że $\varphi_{\{b,c\}}(\Sigma_b) = o_v$, gdzie $o_v \in \Omega_{\Gamma_{j(c)}}^V$ jest V -peryferium pochodzącym od normalnego otoczenia wierzchołka v w $\Gamma_{j(c)}$. Oznaczmy ten biały wierzchołek przez b_v^c i oznaczmy

$$N_c^V = \{b_v^c : v \in V_{\Gamma_{j(c)}}\}.$$

Dla każdego $b \in N_c \setminus N_c^V$ obraz $\varphi_{\{b,c\}}(\Sigma_b)$ jest E -peryferium. Oznaczmy to peryferium przez o_b . Niech $e \in E_{\Gamma_{j(c)}}$ będzie tą krawędzią, dla której $o_b \subset e^\circ$, gdzie $e^\circ = e \cap \Gamma_{j(c)}^\circ$. Niech ε będzie standardową orientacją krawędzi e i niech $\omega_b \prec \varepsilon$ będzie zgodną z ε orientacją peryferium o_b ($|\omega_b| = o_b$). W warunku (4.b) Definicji 2.17 mamy odwzorowanie $\psi_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow A_\varepsilon$ pomiędzy zbiorem Ω_ε zorientowanych zgodnie z ε peryferiów zawartych w e° , a zbiorem A_ε . Dla każdego $\varepsilon' \in A_\varepsilon$ oznaczmy

$$N_c^\varepsilon(\varepsilon') = \{b \in N_c : \omega_b \prec \varepsilon, \psi_\varepsilon(\omega_b) = \varepsilon'\}.$$

Z tego samego warunku zbiór $\{\omega_b : b \in N_c^\varepsilon(\varepsilon')\} = \psi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon')$ jest gęsty w e° . Oznacza to, że po przejściu do zredukowanej sumy częściowej K_c^* obraz $q_c^*(\{\omega_b : b \in N_c^\varepsilon(\varepsilon')\})$ jest gęsty w $e^* = q_c^*(e^\circ)$, gdzie c w indeksie traktujemy jako jednowierzchołkowe c -poddrewno drzewa T i q_c^* jest odwzorowaniem ilorazowym. Oznaczmy ten zbiór przez

$$\Omega^*(\varepsilon') := q_c^*(\{\omega_b : b \in N_c^\varepsilon(\varepsilon')\}).$$

Kluczowym narzędziem, o którym wspomnieliśmy będzie homeomorfizm $\chi_c^e : e^* \rightarrow e$, który przekształca bijektywnie $\Omega^*(\varepsilon')$ na $\text{Bar}_{\varepsilon'}(e)$ dla każdego $\varepsilon' \in A_\varepsilon$, a dokładniej rodzina takich homeomorfizmów

$$\mathcal{H}^E = \{\chi_c^e : c \in V_T^c, e \in E_{\Gamma_{j(c)}}\}$$

Z Uwagi 2.18 każda z komponent $\Gamma_j \subset \Gamma$ pojawi się jako któryś $\Gamma_{j(c)}$, a zatem taki homeomorfizm w końcu zdefiniujemy dla każdej krawędzi $e \in E_\Gamma$ (zazwyczaj będzie to nieskończenie wiele homeomorfizmów odpowiadających różnym c). Do zdefiniowania tych homeomorfizmów użyjemy ogólnego faktu, o którym w pewnej formie wspominaliśmy już w Uwadze 2.15.

Fakt 4.3. *Niech A_1, \dots, A_n będzie rodziną parami rozłącznych, przeliczalnych i gęstych podzbiorów odcinka domkniętego I_A . Tak samo B_1, \dots, B_n w domkniętym odcinku I_B . Wtedy istnieje homeomorfizm $h : I_A \rightarrow I_B$ taki, że $h(A_j) = B_j$ i $h^{-1}(B_j) = A_j$ dla każdego $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Dowód tego faktu to standardowe zastosowanie metody "back and forth". Pominiemy go, gdyż nie wnosi on nic do dowodu lematu.

Definicja 4.4. Niech $c \in V_T^c$ i niech $e \in E_{\Gamma_{j(c)}}$. Niech ε będzie standardową orientacją krawędzi e i niech $A_\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_\varepsilon}\}$. Korzystając z wcześniej wprowadzonych oznaczeń i oznaczeń w powyższym Fakcie 4.3. Niech $I_A = e^*$ i $I_B = e$. Niech $A_j = \Omega^*(\varepsilon_j)$ i $B_j = \text{Bar}_{\varepsilon_j}(e)$, dla $j \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$. Wtedy istnieje homeomorfizm $h : I_A \rightarrow I_B$ przeprowadzający bijektywnie A_j na B_j dla każdego $j \in \{1, \dots, n_\varepsilon\}$. Definiujemy $\chi_c^e : e^* \rightarrow e$ jako ten h .

Z homeomorfizmów z rodziny \mathcal{H}^E skorzystamy pośrednio, definiując dla każdego czarnego wierzchołka $c \in V_T^c$ homeomorfizm $\chi_c : K_c^* \rightarrow \Gamma_{j(c)}$ tak, by dla każdej krawędzi $e \in E_{\Gamma_{j(c)}}$ zachodziło $\chi_c \upharpoonright_{e^*} = \chi_c^e$. W szczególności zauważmy, że obraz pochodzącego od wierzchołka $v \in V_{\Gamma_{j(c)}}$ peryferium $o_v \in \Omega_c^V$ przez odwzorowanie $q_c^* : K_c \rightarrow K_c^*$ odwzoruje się przez χ_c w wierzchołek v . W dowodzie głównego twierdzenia korzystać będziemy z tak otrzymanej rodziny homeomorfizmów

$$\mathcal{H} = \{\chi_c : c \in V_T^c\}.$$

Definicja 4.5. Wprowadzimy podobne do etykietowania l_n etykietowanie

$$l_F^* : K_F^* \rightarrow \{\star\} \cup V_\Gamma \cup \mathcal{E}$$

dla wszystkich skończonych c -poddrzew $F \subset T$.

- Dla każdego $x \in K_F^*$, który nie leży w obrazie żadnego peryferium przez odwzorowanie q_F^* , definiujemy $l_F^*(x) = \star$.
- Dla $x \in q_F^*(\bigcup \Omega_F^V)$, czyli takiego, który leży w obrazie peryferium wierzchołkowego (patrz Uwaga 2.19) i $b = b(x) \in N_F$ mamy $\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b) \in \Omega_{c_b}^V$. Wtedy z warunku (3.a) Definicji 2.17 $\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b)$ też jest V -peryferium. Zatem homeomorfizm $\chi_{c_b} \in \mathcal{H}$ przeprowadza jedyny $y \in q_{c_b}^*(\varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b))$ na pewien wierzchołek $v \in V_{\Gamma_{j(c_b)}}$. Definiujemy $l_F^*(x) = v$.
- Dla $x \in q_F^*(\bigcup \Omega_F^E)$, czyli takiego, który leży w obrazie peryferium krawędziowego, $b = b(x) \in N_F$ i $o = \varphi_{\{b, c_b\}}(\Sigma_b)$ mamy $o \in \Omega_{c_b}^E$. Niech $e \in E_{\Gamma_{j(c_b)}}$ będzie krawędzią, dla której $o \subset e^\circ$. Niech ε będzie standardową orientacją e i niech $\omega \prec \varepsilon$ będzie zgodną z ε orientacją o . Definiujemy $l_F^* = \psi_\varepsilon(\omega)$.

Uwaga 4.6. Każdą z komponent Γ_j grafu Γ możemy potraktować w konstruktywnym kompakcie Markowa jako kompleks X_0 . Możemy zatem etykietowanie l_0 określić na punktach Γ . Wtedy dla każdego $c \in V_T^c$ homeomorfizm χ_c zachowuje etykietowanie, to znaczy $l_0(\chi_c(x)) = l_c^*(x)$.

4.2 Dowód Lematu 4.1

Wyznamy teraz rekurencyjnie ciąg $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset T$ oraz homeomorfizmy $h_n : K_n^* \rightarrow X_n$ takie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ poniższy diagram komutuje

$$\begin{array}{ccc} K_{F_n}^* & \xleftarrow{f_{F_n F_{n+1}}} & K_{F_{n+1}}^* \\ h_n \downarrow & & \downarrow h_{n+1} \\ X_n & \xleftarrow{f_{n+1}} & X_{n+1} \end{array}$$

oraz $l_n(h_n(x)) = l_n^*(x)$, gdzie $l_n^* := l_{F_n}^*$.

Krok 0: Bez straty ogólności niech $X_0 = \Gamma_1$. Z Uwagi 2.18 istnieje czarny wierzchołek $c \in V_T^c$ taki, że $j(c) = 1$. Niech F_0 będzie drzewem złożonym z pojedynczego wierzchołka c . Wtedy $K_0^* = K_{F_0}^* \cong \Gamma_1$. Niech $h_0 = \chi_c : K_0^* \rightarrow X_0$ będzie powyżej zdefiniowanym homeomorfizmem z rodziny \mathcal{H} . Warunek $l_0(h_0(x)) = l_0^*(x)$ jest spełniony z Uwagi 4.6

Krok n: Załóżmy teraz, że mamy wstępujący ciąg poddrzew $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset T$, ciąg przestrzeni $K_0^*, K_1^*, \dots, K_n^*$ oraz ciąg homeomorfizmów $h_k : K_k^* \rightarrow X_k$, gdzie $0 \leq k \leq n$ takich, że poniższy diagram komutuje

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 & \xleftarrow{f_{F_0 F_1}} & K_1 & \xleftarrow{f_{F_1 F_2}} & \dots & \xleftarrow{f_{F_{n-1} F_n}} & K_n \\ h_0 \downarrow & & h_1 \downarrow & & & & h_n \downarrow \\ X_0 & \xleftarrow{f_1} & X_1 & \xleftarrow{f_2} & \dots & \xleftarrow{f_n} & X_n \end{array}$$

i dla każdego $0 \leq k \leq n$ $l_k(h_k(x)) = l_k^*(x)$.

Zdefiniujemy najpierw drzewo F_{n+1} . Przyjrzyjmy się odwzorowaniu $f_{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$. Interesuje nas to, w jakich punktach X_n zachodzą sumy spójne z dołączanymi grafami za pośrednictwem tego odwzorowania. Po dokładnym prześledzeniu konstrukcji oraz rozumowania z poprzedniego podrozdziału przekonamy się, że są to 0-sympleksy X_n o etykietach λ_n różnej od \star lub barycentra 1-sympleksów o etykietach typu e^k , gdzie $0 \neq k \in \mathbb{N}$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich punktów przez \mathfrak{X}_n . Obraz każdego z tych punktów przez h_n^{-1} jest obrazem jakiegoś peryferium przez odwzorowanie ilorazowe $q_{F_n}^*$, bo $l_n^*(h_n^{-1}(x)) = l_n(x) \neq \star$ dla $x \in \mathfrak{X}_n$. Stąd każdemu punktowi $x \in \mathfrak{X}_n$ możemy w jednoznaczny sposób przypisać biały wierzchołek $b(h_n^{-1}(x))$ odpowiadający peryferium, które odwzorowuje się w punkt $h_n^{-1}(x)$ (zgodnie z 2.12). Niech

$$F_{n+1} = F(V_{F_n} \cup \bigcup_{x \in \mathfrak{X}_n} b(h_n^{-1}(x)))$$

będzie c -poddrzewem T rozpiętym przez wierzchołki $V_{F_n} \cup \bigcup_{x \in \mathfrak{X}_n} b(h_n^{-1}(x))$. Dzięki takiemu doborowi drzewa F_{n+1} zapewniamy sobie, że sumy spójne jakie dokonają się za pośrednictwem odwzorowania $f_{F_n F_{n+1}}$ zostaną przeprowadzone w punktach odpowiadających punktom z \mathfrak{X}_n przez homeomorfizm h_n . Ponadto dzięki zachowywaniu przez h_n etykiet l_n i l_n^* sumy spójne w odpowiadających sobie punktach zostaną przeprowadzone z tymi samymi komponentami Γ . Przyjrzyjmy się odwzorowaniu $f_{F_n F_{n+1}}$. Dla każdego $b \in V_{F_{n+1}}^b \setminus V_{F_n}$ określone w Definicji 2.11 c -poddrzewo S_b składa się z pojedynczego czarnego wierzchołka c^b (tego sąsiada b , który nie leży w F_n). K_{c^b} wkłada się w $K_{F_{n+1}}$ i utożsamimy go z jego obrazem przez to włożenie. Wtedy odwzorowanie $f_{F_n F_{n+1}}$ polega na sklejeniu do punktu obrazu $q_{F_{n+1}}^*(K_{c^b})$ dla każdego $b \in V_{F_{n+1}}^b \setminus V_{F_n}$ i pozostawieniu bez zmian pozostałych punktów. Rozważmy obraz $q_{F_{n+1}}^*(K_{c^b})$. Wszystkie peryferia przestrzeni K_{c^b} są też peryferiami w K_{n+1} poza jednym, który odpowiada wierzchołkowi b . Zatem obraz $q_{F_{n+1}}^*(K_{c^b})$ jest tak naprawdę ilorazem $K_{c^b} / (\Omega_{c^b} \setminus \{o\})$ zdefiniowanym podobnie jak K_F^* w 2.11, gdzie $o = b(o)$. To znaczy sklejamy do punktów wszystkie peryferia poza peryferium o . Oznaczmy tę przestrzeń przez

$$K_{c^b}^\# := K_{c^b} / (\Omega_{c^b} \setminus \{o\})$$

i oznaczmy odpowiadające odwzorowanie ilorazowe $q^\# : K_{c^b} \rightarrow K_{c^b}^\#$. Obraz peryferium o przez $q^\#$ oznaczmy przez $\partial K_{c^b}^\#$ i oznaczmy $\text{int}(K_{c^b}^\#) := K_{c^b}^\# \setminus \partial K_{c^b}^\#$. Zauważmy, że mamy naturalny homeomorfizm $\text{int}(K_{c^b}^\#) \cong K_{c^b} \setminus q_{c^b}^*(o)$. Za pomocą którego możemy utożsamiać ze sobą te przestrzenie. Podobnie możemy postąpić z grafem $\Gamma_\sigma^\#$, gdzie σ to pewien wierzchołek lub krawędź grafu Γ . W $\Gamma_\sigma^\#$ mamy wierzchołki brzegowe $V^{\text{bd}}(\Gamma_\sigma^\#)$. Topologicznie $\Gamma_\sigma^\# \setminus V^{\text{bd}}(\Gamma_\sigma^\#) = \Gamma_{j(\sigma)} \setminus \{\text{bc}(\sigma)\}$ i też będziemy te przestrzenie utożsamiać. Rozważmy teraz punkty, w których zachodzą sumy spójne. Niech $x \in \mathfrak{X}_n$, niech

$b(x) := b(h_n^{-1}(x)) \in V_{F_{n+1}}^b \setminus V_{F_n}$ będzie odpowiadającym punktowi $h_n^{-1}(x)$ białym wierzchołkiem T i niech $c(x) = c^{b(x)} \in V_{F_{n+1}}^c \setminus V_{F_n}$ będzie jego czarnym sąsiadem leżącym poza F_n . Mamy dwie opcje

- $l_n(x) = v$ dla pewnego $v \in V_\Gamma$. Wtedy przeciwobrazem przez f_{n+1} punktu x jest włożony w P_v , a więc i w X_{n+1} graf $\Gamma_v^\#$. Z kolei przeciwobrazem punktu $h_n^{-1}(x)$ przez $f_{F_n F_{n+1}}$ jest $K_{c(x)}^\#$. Z założenia o h_n mamy $l_n^*(h_n^{-1}) = v$, stąd $K_{c(x)} \cong \Gamma_{j(v)}^\circ$. Mamy homeomorfizm $\chi_{c(x)} : K_{c(x)}^* \rightarrow \Gamma_{j(v)}$ z rodziny \mathcal{H} . Definiujemy homeomorfizm $\chi_x^\# : K_{c(x)}^\# \rightarrow \Gamma_v^\#$ jako jedyny homeomorfizm pomiędzy tymi przestrzeniami spełniający

$$\chi_x^\# \upharpoonright_{\text{int}(K_{c(x)}^\#)} = \chi_{c(x)} \upharpoonright_{K_{c(x)}^* \setminus q_{c(x)}^*(o(b(x)))}$$

po wspomnianym utożsamieniu $\text{int}(K_{c(x)}^\#)$ z $K_{c(x)}^* \setminus q_{c(x)}^*(o(b))$ i $\Gamma_v^\# \setminus V^{\text{bd}}(\Gamma_v^\#)$ z $\Gamma_{j(v)} \setminus \{v\}$. Tak zadane przekształcenie jednoznacznie rozszerza się na $K_{c(x)}^\#$.

- $l_n(x) = \varepsilon'$ dla pewnej krawędzi $e \in E_\Gamma$, jej standardowej orientacji ε i $\varepsilon' \in A_\varepsilon$. Przeciwobrazem x przez f_{n+1} jest w tym wypadku $\Gamma_{e'}^\#$, gdzie $e' = |\varepsilon'|$, a przeciwobrazem $h_n^{-1}(x)$ przez $f_{F_n F_{n+1}}$ jest $K_{c(x)}^\#$, gdzie $K_{c(x)} \cong \Gamma_{j(e')}^\circ$. Definiujemy analogicznie homeomorfizm $\chi_x^\# : K_{c(x)}^\# \rightarrow \Gamma_{e'}^\#$.

Zauważmy, że

$$\tilde{X}_{n+1} := X_{n+1} \setminus \bigcup_{x \in \mathfrak{X}_n} f_{n+1}^{-1}(\{x\})$$

odwzorowuje się przez f_{n+1} homeomorficznie na $X_n \setminus \mathfrak{X}_n$ i oznaczmy ten indukowany przez f_{n+1} homeomorfizm:

$$\tilde{f}_{n+1} : \tilde{X}_{n+1} \rightarrow X_n \setminus \mathfrak{X}_n.$$

Podobnie

$$\tilde{K}_{n+1}^* := K_{n+1}^* \setminus \bigcup_{x \in \mathfrak{X}_n} f_{F_n F_{n+1}}^{-1}(\{h_n^{-1}(x)\})$$

odwzorowuje się przez $f_{F_n F_{n+1}}$ homeomorficznie na $K_n^* \setminus h_n^{-1}(\mathfrak{X})$. Oznaczmy ten indukowany przez $f_{F_n F_{n+1}}$ homeomorfizm

$$\tilde{f}_{F_n F_{n+1}} : \tilde{K}_{n+1}^* \rightarrow K_n^* \setminus h_n^{-1}(\mathfrak{X}).$$

Możemy teraz zdefiniować homeomorfizm $h_{n+1} : K_{n+1}^* \rightarrow X_{n+1}$ poprzez następujące warunki:

- $h_{n+1} \upharpoonright_{\tilde{K}_{n+1}^*} = \tilde{f}_{n+1}^{-1} \circ h_n \circ \tilde{f}_{F_n F_{n+1}}$
- $h_{n+1} \upharpoonright_{K_{c(x)}^\#} = \chi_x^\# (K_{c(x)}^\# = f_{F_n F_{n+1}}^{-1}(h_n^{-1}(x)))$

Komutowanie diagramu

$$\begin{array}{ccc} K_{F_n}^* & \xleftarrow{f_{F_n F_{n+1}}} & K_{F_{n+1}}^* \\ h_n \downarrow & & \downarrow h_{n+1} \\ X_n & \xleftarrow{f_{n+1}} & X_{n+1} \end{array}$$

oraz zachowywanie etykiet wynika wprost z konstrukcji. Sprawdzenie tego to żmudna weryfikacja, którą pominiemy. Pozostaje kofinalność łańcucha $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset T$, którą też łatwo uzasadnić. Wystarczy sprawdzić, że dla każdego czarnego wierzchołka w dowolnym F_n oraz dla każdego białego sąsiada tego wierzchołka istnieje F_m , do którego ten biały wierzchołek należy, a to również wynika z konstrukcji. Tym samym kończymy dowód Lematu 4.1. \square

Twierdzenie 4.7.

Regularne drzewo grafów $\mathcal{X}(\mathcal{R})$ dla grafowego układu łączącego \mathcal{R} jest homeomorficzne z konstruktywnym kompaktem Markowa $\mathcal{M}(\mathcal{R})$.

Twierdzenie wynika wprost z Lematu 4.1 oraz z następującego ogólnego faktu o systemach odwrotnych (patrz [4], Wniosek 1 w Rozdziale 2.5, str. 139).

Fakt 4.8. *Niech*

$$\mathfrak{J} = (\{X_i\}_{i \in I}, \{f_{ij} : X_j \rightarrow X_i\}_{i \leq j})$$

będzie systemem odwrotnym kompaktów metrycznych X_i nad zbiorem skierowanym I , w którym f_{ij} to odwzorowania ciągle. Rozważmy ciąg odwrotny

$$\mathfrak{J}' = (\{X_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{f_{i_n i_m} : X_{i_m} \rightarrow X_{i_n}\}_{n \leq m})$$

nad łańcuchem kofinalnym $i_0 < i_1 < \dots$, to znaczy takim, że dla każdego $i \in I$ istnieje $m \in \mathbb{N}$, takie, że $i \leq i_m$. Wtedy

$$\varprojlim \mathfrak{J} = \varprojlim \mathfrak{J}'$$

Dowód Twierdzenia 4.7. Niech \mathcal{S}_Θ będzie standardowym systemem odwrotnym dla Θ jak na początku rozdziału i niech \mathcal{S}'_Θ będzie podciągiem z Lematu 4.1. Na mocy powyższego faktu i Lematu 4.1 $\varprojlim \mathcal{S}_\Theta \cong \varprojlim \mathcal{S}'_\Theta \cong \varprojlim \mathcal{I}(\mathcal{R})$. Zatem $\mathcal{X}(\mathcal{R}) = \varprojlim \mathcal{S}_\Theta \cong \varprojlim \mathcal{I}(\mathcal{R}) = \mathcal{M}(\mathcal{R})$. \square

Literatura

- [1] Nima Hoda, Jacek Świątkowski *Trees of graphs as boundaries of hyperbolic groups*, przed publikacją
- [2] Mikołaj Czapp *A constructive approach to Markov compacta*
- [3] Dominika Pawlik *Gromov boundaries as Markov compacta*
<https://arxiv.org/abs/1503.04577>
- [4] Ryszard Engelking *Topologia Ogólna*, PWN, Warszawa, 1976